УДК 517.98

О нелокальной метрической регулярности нелинейных операторов

On nonlocal metric regularity of nonlinear operators

© 2006 г. А.В. Дмитрук

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова
Факультет ВМК, кафедра оптимального управления

dmitruk@member.ams.org

Пусть $F : X \to Y$ есть отображение одного банахова пространства в другое, непрерывно дифференцируемое в точке x_0. Классическая теорема Л.А.Люстерника (1934) утверждает, что если $F'(x_0)$ невырождено, т.е. отображает X "на" Y, то в некоторых окрестностях точки x_0 и ее образа $y_0 = F(x_0)$ справедлива следующая оценка расстояния до множеств уровня оператора F: $\;dist\,(x, F^{-1}(y)) \le \mathrm{const}\, ||F(x) - y||$. Это свойство оказалось весьма полезным, особенно в многочисленных исследованиях по теории экстремума; в последнее время его стали называть *метрической регулярностью.* Оно имеет следующую эквивалентную форму: существует константа $a > 0$ и окрестность $\mathcal{O}(x_0)$ точки x_0 такие, что образ любого шара $B_r(x) \subset \mathcal{O}(x_0)$ содержит соответствующий шар радиуса ar: $F(B_r(x)) \supset B_{ar}(F(x))$. Последнее свойство называется *накрыванием* оператора F в окрестности $\mathcal{O}(x_0)$. Из этих двух свойств более удобным и часто используемым в качестве "рабочего инструмента" является метрическая регулярность, а устанавливать само наличие свойства более удобно в форме накрывания.

Указанное свойство (в обеих формах) априори справедливо лишь локально, в достаточно малой окрестности точки x_0, и поэтому возникает естественный вопрос, в каких случаях можно гарантировать его наличие на более широком множестве?

Первым принципиально важным шагом в этом направлении было абстрактное обобщение теоремы Люстерника, предложенное А.А.Милютиным [1]: если дано отображение $T : X \to Y$ полного метрического пространства X в линейное метрическое пространство Y с инвариантной метрикой, накрывающее с константой $a > 0$, и дано другое отображение $S : X \to Y$, сжимающее с константой $b < a$ (т.е. $S(B_r(x)) \subset B_{br}(Sx)$ для любого шара в X), то их сумма $F = T + S$ накрывает на всем пространстве X с константой $a - b > 0$. Здесь важны два момента: для результирующего отображения F константа накрывания указана явно, и его накрывание устанавливается на всем исходном пространстве X. Это позволяет получать равномерное накрывание для семейства операторов, зависящих от параметра, и накрывание на "большом" множестве. Например, справедливы следующие теоремы [1–4].

Теорема 1. *Пусть X, Y – банаховы пространства, оператор $F : X \to Y$ непрерывно дифференцируем на открытом множестве $G \subset X$. Пусть $\exists\, a > 0$ такое, что $\forall\, x \in G$ линейный оператор $F'(x)$ накрывает с константой a. Тогда $\forall\, a' < a$ нелинейный оператор F накрывает с константой a' на всем множестве G.*

Теорема 2. *Пусть в X имеется еще одна топология, более слабая чем порожденная его нормой. Пусть в некоторой $\tau-$окрестности $\mathcal{O}_\tau(x_0)$ точки x_0 оператор $F : X \to Y$ дифференцируем по Фреше, и его производная $F'(x)$ является $\tau-$непрерывной в x_0, т.е. $||F'(x) - F'(x_0)|| \to 0$ при $x \to x_0$ относительно τ. Пусть, наконец, $F'(x_0)$ отображает "на". Тогда в некоторой $\tau-$окрестности $\mathcal{V}_\tau(x_0)$ оператор F накрывает с некоторой константой $a > 0$.*

Теорема 3. *Пусть* $\mathcal{A}$ *есть топологическое пространство, и* $\forall\,\alpha \in \mathcal{A}$ *задан линейный непрерывный оператор* $P_\alpha : X \to \mathbf{R}^q$ *из банахова пространства в конечномерное. Пусть для некоторого* $\alpha_0 \in \mathcal{A}$ *оператор* P_{α_0} *отображает "на", и* $\forall\, x \in X$ *имеется сходимость* $P_\alpha x \to P_{\alpha_0} x$ *при* $\alpha \to \alpha_0$. *Тогда существует окрестность* $\mathcal{O}(\alpha_0)$ *и число* $c > 0$, *такие что* $\forall\,\alpha \in \mathcal{O}(\alpha_0)$ *оператор* P_α *накрывает с константой* c.

При наличии нелокального накрывания справедлива следующая оценка расстояния до множества основного уровня оператора.

Теорема 4. *Пусть* W *– полное метрическое,* Y *– нормированное пространства, отображение* $F : W \to Y$ *накрывает с константой* $a > 0$ *на открытом множестве* $G \subset W$, *и его множество уровня* $\mathcal{M} = \{\, w \in G \mid F(x) = 0\,\}$ *непусто. Пусть ограниченное множество* $\Omega \subset W$ *и число* $\delta > 0$ *таковы, что* $\delta-$ *окрестность* Ω *содержится в* G. *Тогда существует такое число* L, *что для любой точки* $w \in \Omega$

$$dist\,(w,\, \mathcal{M}) \;\le\; L\,||F(w)||\,. \tag{1}$$

Ряд других, более специальных теорем, приведен в [3, 4]. Они были использованы автором [2, 3] для доказательства теоремы о корректности перехода от нелинейной управляемой системы $\dot{x} = f(x,u,t)$ с концевыми ограничениями равенства $K(x(0),x(T)) = 0$ к её расширению (овыпуклению) путем введения т.н. скользящих режимов:

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^{N} \alpha^i(t)\, f(x,u^i,t), \qquad \alpha^i(t) \ge 0, \quad \sum_{i=1}^{N} \alpha^i(t) = 1, \qquad K(x(0),x(T)) = 0. \tag{2}$$

Подобные теоремы называют также релаксационными или аппроксимационными. Данная теорема обобщает классические результаты Н.Н.Боголюбова, Л.С.Янга, Э.Дж.Макшейна и Р.В. Гамкрелидзе; она позволяет приблизить траекторию расширенной управляемой системы (2) траекториями исходной, при условии что ограничения равенства расширенной системы невырождены, т.е. удовлетворяют условию Люстерника. Доказательство проводится с помощью специального итерационного процесса [3, §5.4], на каждом шаге которого применяется оценка типа (1) для тройки $w = (x,u,\alpha)$ (в качестве G выступает произведение равномерной окрестности данной траектории по (x,u) на слабую-* окрестность по α, а симплекс по α задает Ω). В свою очередь, теорема о корректности была использована автором для доказательства Принципа максимума в общей задаче оптимального управления с фазовыми и т.н. регулярными смешанными ограничениями [3].

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект 04-01-00482.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *А.В.Дмитрук, А.А.Милютин, Н.П.Осмоловский.* Теорема Люстерника и теория экстремума // Успехи мат. наук, 1980, т. 35, № 6, с. 11–46.

2. *A.V. Dmitruk.* A nonlocal Lyusternik estimate and its application to control systems with sliding modes // in "Nonlinear Control Systems 2001"(ed. A.B.Kurzhanski and A.L.Fradkov), Elsevier, 2002, vol. 2, p. 1061–1064 (http://dmitruk.tripod.com).

3. *А.А.Милютин, А.В.Дмитрук, Н.П.Осмоловский.* Принцип максимума в оптимальном управлении, М., Изд-во мехмата МГУ, 2004.

4. *A.V. Dmitruk.* On a nonlocal metric regularity of nonlinear operators // Control and Cybernetics, 2005, v. 34, no. 3, p. 723–746.