Квадратичные достаточные условия минимальности анормальных субримановых геодезических

А.В. Дмитрук

Содержание

Введение ... 2

Часть I. Достаточные условия сильного минимума для особых траекторий

§1. Постановка задачи о кривой минимальной длины
в виде задачи оптимального управления ... 4
§2. Основные понятия и предположения ... 6
§3. Принцип максимума для задачи (Z) ... 10
§4. Переход к присоединенному базису ... 16
§5. Применение общих достаточных условий к задаче $(\tilde{Z})$ ... 18
§6. Переход к $u_0 = 1$ ... 21
§7. Квадратичные условия в задаче (S_1) и системе (Ж) ... 25

Часть II. Достаточные условия сильного минимума для произвольных квадратично жестких траекторий

§8. Описание ситуации ... 31
§9. Переход к системе $(')$ ... 34
§10. Переход к задачам (P_1), (P) и (Y_*) ... 39

Часть III. Достаточные условия понтрягинского минимума

§11. Переход к задачам (Z_*) и (S) ... 43
§12. Переход к $u_0 = 1$ ... 45
§13. Квадратичные условия П$-$ минимума в задаче (S_1) ... 48
§14. Условия П$-$ минимума для квадратично П$-$ жестких траекторий ... 51

Часть IV. Специальные случаи, примеры и доказательства вспомогательных утверждений

§15. Специальные случаи ... 54
§16. Примеры ... 57
§17. Приложение ... 67
Литература ... 76

Введение

Настоящая работа посвящена получению квадратичных достаточных условий минимальности для анормальных траекторий в задаче о кривых наименьшей длины в субримановых метриках. Точнее, мы будем рассматривать траектории, подчиненные (или, как еще говорят, касательные к) некоторому распределению, на котором задана некоторая субметрика, под которой мы понимаем произвольный положительный сублинейный функционал. В частности, это может быть субриманова метрика. (Таким образом, изучаемый в данной статье класс субметрик существенно шире указанного в заглавии класса субримановых метрик, однако мы оставили этот термин в заглавии в качестве узнаваемого "ключевого слова".)

Сначала мы будем заниматься следующим вопросом. Пусть дана "особая"(т.е. строго анормальная) траектория некоторой субметрики, соединяющая две данные точки. Каковы будут квадратичные достаточные условия того, что эта траектория действительно является кратчайшей (относительно данной субметрики) среди всех других кривых из некоторой окрестности данной траектории, также соединяющих те же две точки? Эта ситуация укладывается в рамки общего класса задач оптимального управления, линейных по управлению, для которого в случае, когда исследуемая траектория особая, уже известны [18] достаточные условия некоторого квадратичного порядка для сильного и т.н. понтрягинского минимума. Непосредственное применение этих общих результатов позволяет получить квадратичные достаточные условия сильной и понтрягинской минимальности особых траекторий для распределений и многообразий произвольных размерностей.

Более того, эти условия можно подвергнуть дальнейшим (довольно нетривиальным) преобразованиям, в результате которых мы приходим к некоторому окончательному виду этих достаточных условий. Эти окончательные условия оказываются в точности совпадающими с квадратичными достаточными условиями жесткости, полученными недавно А.А.Милютиным [17]. Таким образом, квадратичные достаточные условия сильного (или понтрягинского) минимума для особой траектории оказываются теми же, что и квадратичные достаточные условия е„ жесткости (соответственно, понтрягинской жесткости). Подчеркн„м ещ„ раз, что сначала вс„ это будет получено для особых траекторий.

С другой стороны известно, что жесткая траектория данного распределения не обязана быть особой для произвольно выбранной субметрики на этом распределении. Мы далее рассматриваем случай произвольной квадратично жесткой траектории некоторого распределения, и с помощью одного приема, предложенного А.А.Милютиным, делаем "обратный"переход — от условий жесткости к условиям сильного минимума в произвольной субметрике. В результате этого будет доказана

Основная теорема 1. *Если траектория квадратично жесткая, то в любой строго выпуклой субметрике она дает сильный минимум расстояния между двумя данными точками (хотя может стать и неособой).*

(Здесь мы приводим несколько упрощенную формулировку — на самом деле от субметрики мы требуем более слабое свойство, чем ее строгая выпуклость; см. ниже предположение A3 и теорему 8.1.)

Аналогичная схема рассмотрений проводится и для понтрягинского минимума, с учетом того, что здесь жесткость и минимальность зависят от выбора базиса в распределении. В этом случае доказана

Основная теорема 2. *Если траектория в некотором базисе квадратично понтрягински-жесткая, то в любой субметрике из пучка, соответствующего этому базису, она дает минимум расстояния между двумя данными точками относительно* $W_{1,1}-$ *нормы, т.е. относительно* L_1- *нормы по скоростям.*

(Точные определения всех понятий даны в §13, а формулировка утверждения – в теореме 14.1.)

Эти теоремы были анонсированы автором в [19]; они обобщают и усиливают достаточные условия минимальности, полученные в работах [13] – [16], в следующих направлениях: а) ранее рассматривались только двумерные распределения и только субримановы метрики; б) условия, полученные в [12] – [15], гарантируют минимум только для малых отрезков кривой; в) условия, полученные в [16], гарантируют не сильный минимум, а только $W_{1,1}-$ минимум; г) условия из [16] содержат излишне жесткие требования, которые можно существенно ослабить.

Отметим здесь, что вопросы о жесткости и минимальности траекторий, подчиненных распределениям, в последнее время являются предметом довольно интенсивного изучения. Не претендуя на полноту, укажем в этой связи работы [11] – [17].

Стоит отметить также следующее обстоятельство. Несмотря на то, что задача о нахождении кратчайшей кривой является по своему определению задачей на экстремум, до сих пор для получения условий минимальности в ней, в случае анормальных траекторий, из всей теории экстремальных задач использовался в основном только принцип максимума Понтрягина – необходимое условие первого порядка. Все дальнейшие условия получались, главным образом, не путем применения некоторых общих условий к данному конкретному классу задач, а путем построения специальных, весьма сложных конструкций, приспособленных для анализа именно этого класса задач. Такое положение вряд ли можно признать удовлетворительным с точки зрения теории экстремальных задач. В настоящей работе мы попытались применить квадратичные условия минимальности особых траекторий, полученные ранее для общего класса задач оптимального управления с линейно входящим управлением [7] – [10] (нужные нам результаты этих работ суммированы в [18]), к данному классу задач. Эта попытка оказалась успешной в том смысле, что удалось получить более общие и более сильные результаты, чем уже известные. Наиболее полными и завершенными получились квадратичные *достаточные* условия; именно они и будут предметом изложения настоящей статьи. (В работе [17] общие квадратичные условия минимума были применены, также успешно, для получения квадратичных условий жесткости, для чего понятие жесткости было предварительно сведено к понятию минимума в некоторой задаче оптимального управления.)

Автор выражает искреннюю благодарность А.А.Милютину за многочисленные обсуждения и полезные советы, а также Н.Н.Петрову за указание на данный класс задач как на предмет возможного приложения полученных ранее результатов. Работа выполнена при поддержке РФФИ, проекты 97-01-00135 и 96-15-96072.

Часть I. Достаточные условия сильного минимума для особых траекторий

1 Постановка задачи о кривой минимальной длины в виде задачи оптимального управления

Поскольку все наши рассмотрения будут проходить в окрестности некоторой заданной кривой, которую мы предполагаем не имеющей самопересечений, то всегда можно считать, что мы находимся в обычном $n-$ мерном пространстве, чтобы не затемнять существа дела дополнительными конструкциями, связанными с многообразием.

Итак, пусть в $\mathbb{R}^n$ на некотором открытом связном множестве $\mathcal{M}$ заданы k дважды гладких векторных полей $r_0(x), \ldots, r_{k-1}(x)$, линейно независимых в каждой точке $\mathcal{M}$. (Нам удобно брать нумерацию $0, 1, \ldots, k-1$; это будет видно из дальнейшего.) Эти поля задают т.н. распределение

$$\Gamma(x) = \operatorname{Lin}\{r_0(x), \ldots, r_{k-1}(x)\} \tag{1.1}$$

размерности k на множестве $\mathcal{M}$. В случае, когда $\mathcal{M}$ стягиваемо (а окрестность любой интересующей нас траектории всегда можно считать таковой), можно утверждать и обратное: если на $\mathcal{M}$ задано $k-$ мерное дважды гладкое (т.е. обладающее дважды гладким базисом в окрестности каждой точки из $\mathcal{M}$) распределение $\Gamma(x)$, то найдутся k дважды гладких векторных полей, определенных на всем множестве $\mathcal{M}$, которые в каждой точке $\mathcal{M}$ являются базисом $\Gamma(x)$, т.е. удовлетворяют соотношению (1.1). Мы не требуем, чтобы $\Gamma(x)$ было скобочно порождающим.

Определение 1.1. Действительную функцию $q(x,\bar{x})$ аргументов $x \in \mathcal{M}$, $\bar{x} \in \Gamma(x)$ мы будем называть субметрикой на $\Gamma(x)$, если для любого фиксированного $x \in \mathcal{M}$ она является положительной сублинейной функцией относительно $\bar{x}$, т.е. $q(x,\bar{x}) > 0$ для любых ненулевых $\bar{x} \in \Gamma(x)$, $\quad q(x,\alpha\bar{x}) = \alpha q(x,\bar{x}) \ \ \forall\, \alpha \geq 0$, и $q(x,\bar{x}_1+\bar{x}_2) \leq q(x,\bar{x}_1) + q(x,\bar{x}_2) \quad \forall\, \bar{x}_1,\bar{x}_2 \in \Gamma(x)$.

Мы предполагаем априори, что функция q непрерывна по $(x,\bar{x})$; далее будут приняты некоторые предположения о ее "дважды гладкости".

В частном случае, когда $q^2(x,\bar{x}) = (R(x)\bar{x},\bar{x})$ есть положительно определенная квадратичная форма относительно $\bar{x} \in \Gamma(x)$, функция q называется субримановой метрикой, и говорят, что распределение $\Gamma(x)$ вместе с субметрикой $q(x,\bar{x})$ задают субриманову структуру на $\mathcal{M}$. Таким образом, субриманова метрика есть просто евклидова метрика на $\Gamma(x)$. Без нарушения общности можно считать, что $R(x)$ есть матрица размера $n \times n$, т.е. что евклидова метрика задана для всех $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, но мы будем рассматривать ее только для $\bar{x} \in \Gamma(x)$. Мы будем предполагать, что $R(x)$ дважды гладкая. Более общий, но также частный случай субметрики есть случай субфинслеровой метрики, когда q симметрична относительно $\bar{x}: \quad q(x,-\bar{x}) = q(x,\bar{x})$.

Поскольку каждый $\bar{x} \in \Gamma(x)$ может быть представлен в виде $\bar{x} = \sum u_i r_i(x)$, где $u = (u_0,\ldots,u_{k-1}) \in \mathbb{R}^k$, можно определить функцию

$$\varphi(x,u) = q(x,\bar{x}) = q(x,\sum u_i r_i(x)), \tag{1.2}$$

которая задает субметрику q в данном базисе $r_0(x),\ldots,r_{k-1}(x)$.

В случае субримановой метрики имеем:

$$(R(x)\bar{x},\bar{x}) = \sum_{ij} u_i u_j \,(R(x)r_i(x), r_j(x)) = (C(x)u,u),$$

где $C(x)$ есть матрица размера $k \times k$ с элементами $C_{ij}(x) = (R(x)r_i(x), r_j(x))$, а длина вектора $\bar{x}$ выражается через его коэффициенты в базисе $r_0(x),\ldots,r_{k-1}(x)$ так:

$$||\bar{x}|| = q(x,\bar{x}) = \sqrt{((x)u,u)}.$$

Если базис ортонормирован, т.е. $(x) = E$ — единичная матрица, то просто

$$||\bar{x}|| = |u|_2 = \sqrt{u_0^2 + \ldots + u_{k-1}^2}\ .$$

В области $\mathcal{M}$ зафиксированы две точки a,b, и рассматриваются всевозможные абсолютно непрерывные кривые $x(t)$, $t \in [0,T]$ (отрезок, вообще говоря, для каждой кривой свой), соединяющие эти две точки: $x(0) = a$, $x(T) = b$, и "касательные"к распределению $\Gamma(x)$, т.е. $\dot{x}(t) \in \Gamma(x(t))$ для почти всех t. Кривые, касательные к Γ, будем называть $\Gamma-$ допустимыми, или просто допустимыми. Они также могут быть определены как решения дифференциального уравнения

$$\dot{x}(t) = \sum u_i(t)\, r_i(x(t)), \tag{1.3}$$

где все $u_i \in L_1[0,T]$.

Для каждой допустимой кривой определена ее длина

$$J(x(\cdot)) = \int_0^T q(x, \dot{x})\, dt, \tag{1.4}$$

или, пользуясь представлением (1.2),

$$J(x,u) = \int_0^T \varphi(x,u)\, dt.$$

В случае субримановой метрики имеем

$$J = \int_0^T \sqrt{(R(x)\dot{x}, \dot{x})}\, dt \;= \int_0^T \sqrt{(Q(x)u, u)}\, dt\;.$$

Так как длина кривой не зависит от ее параметризации (это соответствует положительной однородности первой степени функции q по $\bar{x}$), то можно рассматривать все допустимые кривые на одном и том же отрезке $[0,T]$.

Среди всех допустимых кривых, соединяющих данные точки a, b, требуется найти кривую с минимальной длиной. Таким образом, мы имеем следующую задачу оптимального управления:

Задача (I):

$$J = \int_0^T \varphi(x,u)\, dt \longrightarrow \min, \quad \dot{x} = \sum u_i r_i(x), \quad x(0) = a, \quad x(T) = b.$$

Мы разделяем ту точку зрения (см. напр. [13]), что имея дело с задачей на экстремум в классе $\Gamma-$ допустимых кривых, более удобно работать с распределением, представляя его в виде управляемой системы (1.3), нежели в виде нулей дифференциальных форм, что более привычно для дифгеометров. (Последнее соответствует двойственному способу задания распределения $\Gamma(x)$ как множества тех $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, для которых $(\tilde{r}_j(x), \bar{x}) = 0$, где $\tilde{r}_j(x)$, $j = 1, \ldots, n-k$ есть базис в дополнении к $\Gamma(x)$.)

2 Основные понятия и предположения

Пусть теперь $\hat{x}(t)$ – одна из допустимых кривых. Спрашивается, каковы необходимые и достаточные условия того, чтобы эта кривая имела минимальную длину среди всех допустимых кривых из некоторой своей окрестности (и соединяющих те же две точки)? Изучению этого вопроса и посвящена данная статья.

Нам потребуется принять некоторые предположения относительно кривой $\hat{x}$ и поведения субметрики q в ее окрестности.

Предположение А1. Кривая $\hat{x}(t),\ t \in [0,T]$ трижды гладкая, имеет ненулевую производную, и не имеет самопересечений.

(Последнее требование не является на самом деле существенным: простым введением дополнительной координаты от него легко освободиться, но мы принимаем его, чтобы не усложнять изложение.)

Обозначим через $\hat{\chi}$ образ кривой $\hat{x}(t),\ t \in [0,T]$ в пространстве $\mathbb{R}^n$.

Определение 2.1. Будем говорить, что субметрика $q(x,\bar{x})$ имеет дважды гладкую опорную гиперплоскость в окрестности кривой $\hat{x}(t)$, если в некоторой окрестности множества $\hat{\chi}$ существует дважды гладкое $(k-1)-$ мерное подпространство $\Gamma_0(x) \subset \Gamma(x)$ и дважды гладкое не обращающееся в нуль векторное поле $r_0(x) \in \Gamma(x)$ такие, что аффинная гиперплоскость $r_0(x)+\Gamma_0(x)$ не имеет общих точек с относительной внутренностью годографа $F(x) = \{\bar{x} \in \Gamma(x) \,|\, q(x,\bar{x}) \leq q(x, r_0(x))\,\}$ и, кроме того, $\forall\, t \quad r_0(\hat{x}(t)) = \dot{\hat{x}}(t)$.

При заданном базисе в $\Gamma(x)$ это свойство означает, что в некоторой окрестности множества $\hat{\chi}$ существуют дважды гладкие не обращающиеся в нуль вектор-функции $l(x), v(x) \in \mathbb{R}^k$ такие, что если $u \in \mathbb{R}^k, \quad \varphi(x,u) \leq \varphi(x,v(x)),$ то $(l(x),u) \leq (l(x),v(x))$ и, кроме того, $\forall\, t \quad v(\hat{x}(t)) = \hat{u}(t)$.

Предположение А2. Субметрика q имеет дважды гладкую опорную гиперплоскость в окрестности кривой $\hat{x}(t)$.

Нетрудно показать, что, например, любая трижды гладкая метрика q на $\mathcal{M} \times \mathbb{R}^n$, или любая дважды гладкая риманова метрика, будучи ограничена на любое дважды гладкое распределение $\Gamma(x)$, имеет дважды гладкую опорную гиперплоскость в окрестности любой допустимой кривой $\hat{x}(t)$, удовлетворяющей предположению А1. В дальнейшем мы будем опускать, для краткости, слова "дважды гладкое".

Определение 2.2. Опорную гиперплоскость $\Gamma_0(x)$ для субметрики q в окрестности кривой $\hat{x}(t)$ будем называть строгой опорной, если для любого x из некоторой окрестности множества $\hat{\chi}$ аффинная гиперплоскость $r_0(x)+\Gamma_0(x)$ имеет единственную общую точку $r_0(x)$ с годографом $F(x)$.

При заданном базисе в $\Gamma(x)$ это свойство означает, что в некоторой окрестности множества $\hat{\chi}$ существуют дважды гладкие не обращающиеся в нуль функции $l(x),\, v(x) \in \mathbb{R}^k$, для которых, кроме указанных выше, выполняется также следующее свойство: если $u \in \mathbb{R}^k, \quad \varphi(x,u) \leq \varphi(x,v(x)),$ и $(l(x),u) = (l(x),v(x)),$ то $u = v(x)$.

Очевидно, что если субметрика строго выпукла (т.е. $\forall x$ сублинейная функция $q(x,\bar{x})$ строго выпукла по $\bar{x}$), то любая опорная гиперплоскость автоматически будет строгой опорной. В частности, это будет для любой субримановой метрики.

Нам потребуется (при получении достаточных условий сильного минимума) также следующее усиление предположения А2.

Предположение А3. Субметрика q имеет дважды гладкую *строгую* опорную гиперплоскость в окрестности кривой $\hat{x}(t)$.

Отметим, что выполнение предположений А2, А3 не зависит от выбора параметризации кривой $\hat{x}(t)$. Любая субриманова метрика удовлетворяет предположению А3.

Итак, мы изучаем допустимую кривую $\hat{x}(t), \hat{u}(t)$ в задаче (I), и будем пока считать что выполнены предположения А1, А3. Нам будет удобно слегка переформулировать задачу. Задача (I), очевидно, эквивалентна и обычно ставится как следующая задача быстродействия:

Задача (T):

$$\dot{x} = \sum u_i r_i(x), \qquad x(0) = a, \quad x(T) = b,$$

$$\varphi(x,u) \le 1, \qquad J(x,u) = T \longrightarrow \min .$$

Однако для нас будет более удобно поставить ее как задачу на фиксированном отрезке времени $[0,T]$:

Задача (Z):

$$\dot{x} = z \sum u_i r_i(x), \qquad \dot{z} = 0, \tag{2.1}$$

$$x(0) = a, \quad x(T) = b, \tag{2.2}$$

$$z > 0, \qquad \varphi(x,u) \le 1, \qquad J = z(0) \longrightarrow \min .$$

Здесь z — дополнительная фазовая переменная; это есть константа, ограничивающая скорость движения:

$$||\dot{x}|| = q(x,\dot{x}) \ \le \ z \cdot \varphi(x,u) \ \le z,$$

и задача состоит в том, чтобы перевести точку a в точку b за данное время T при минимально возможном ограничении на скорость сверху. Фазовые переменные в этой задаче $(x,z) \in \mathbb{R}^{n+1}$, и все кривые рассматриваются в открытом множестве $x \in \mathcal{M}$, $z > 0$. Управление по-прежнему $u = (u_0, \ldots, u_{k-1}) \in \mathbb{R}^k$. Очевидно, задачи (T) и (Z) эквивалентны.

Таким образом, с этого момента мы будем рассматривать именно задачу (Z). Будем обозначать $w = (z,x,u)$ и соответственно исследовать траекторию $\hat{w} = (\hat{z},\hat{x},\hat{u})$.

Напомним, что согласно классическому вариационному исчислению (КВИ) говорят, что траектория $\hat{w}$ доставляет *слабый минимум* в задаче (Z), если она является точкой локального минимума относительно нормы $||w|| = |z| + ||x||_C + ||u||_\infty$; и доставляет *сильный минимум,* если она является точкой локального минимума относительно полунормы $||w||' = |z| + ||x||_C$ при свободном u.

Лемма 2.1. Траектория $\hat{w}$ доставляет сильный (строгий сильный) минимум в задаче (Z) тогда и только тогда, когда кривая $\hat{x}(t)$ имеет наименьшую (строго наименьшую) длину среди всех допустимых кривых, соединяющих точки a, b и лежащих в некоторой окрестности множества $\hat{\chi}$.

Это означает, что понятие сильного минимума в задаче (Z) согласуется с понятием локального минимума длины кривой в обычном геометрическом смысле.

Доказательство мы отнесли в Приложение А.

Мы будем рассматривать также следующий тип минимума, промежуточный между слабым и сильным.

Определение 2.3. Будем говорить, что $\hat{w}$ есть точка *понтрягинского минимума* (сокращенно, $\Pi-$ *минимума*) в задаче (Z), если для любого N существует $\varepsilon > 0$ такое, что $\hat{w}$ есть точка минимума в задаче (Z) на множестве

$$|z - \hat{z}| + ||x - \hat{x}||_C < \varepsilon, \quad ||u - \hat{u}||_1 < \varepsilon, \quad ||u - \hat{u}||_\infty \le N.$$

Очевидно, для любой субметрики $\Pi-$ минимум означает просто минимум относительно нормы $||w||_1 = |z| + ||x||_C + ||u||_1$.

Далее обратим внимание, что в задаче (Z) присутствует смешанное ограничение $\varphi(x, u) \le 1$. Введем множество допустимых управлений (годограф, или единичный шар субметрики в данном базисе):

$$U(x) = \{u \mid \varphi(x, u) \le 1\}, \tag{2.3}$$

которое, вообще говоря, зависит от x. Таким образом, смешанное ограничение $\varphi(x, u) \le 1$ эквивалентно включению $u \in U(x)$.

В случае субримановой метрики можно считать, что вектора $r_0(x), \dots, r_{k-1}(x)$ образуют ортонормированный базис в $\Gamma(x)$; тогда $\varphi(x, u) = |u|$, и тем самым смешанное ограничение превращается в классическое понтрягинское ограничение на управление в виде $|u| \le 1$, т.е. $u \in U$ с постоянным множеством U. В общем же случае избавиться от зависимости U от x нельзя.

3 Принцип максимума для задачи (Z).

Пусть $\hat{w}$ есть точка П$-$ минимума в задаче (Z). Тогда для нее выполнено необходимое условие первого порядка — принцип максимума Понтрягина. Выпишем его сначала в случае субримановой метрики, а затем покажем, что изменится в общем случае.

Принцип максимума (ПМ) означает, что существуют липшицевы функции $\psi_z(t)$, $\psi_x(t)$ размерностей соответственно n, 1 и числа $\alpha_0 \geq 0$, β_0, β_T такие что набор (он называется набором множителей Лагранжа) $\lambda = (\psi_z(\cdot), \psi_x(\cdot), \alpha_0, \beta_0, \beta_T)$ нетривиальный ($\lambda \neq 0$), ему соответствуют

функция Понтрягина $H[\lambda](z, x, u) = \psi_x \cdot z \sum u_i r_i(x) + \psi_z \cdot 0$

и концевая функция Лагранжа $l[\lambda](x_0, x_T) = \alpha_0 z(0) + \beta_0 x(0) + \beta_T x(T)$,

для которых выполнены следующие соотношения вдоль траектории $\hat{w}$:

сопряженные уравнения:

$$\dot{\psi}_x = -H_x[\lambda] = -\hat{z}\, \psi_x \sum \hat{u}_i\, r_i'(\hat{x}), \tag{3.1}$$

$$\dot{\psi}_z = -H_z[\lambda] = -\psi_x \sum \hat{u}_i\, r_i(\hat{x}), \tag{3.2}$$

условия трансверсальности:

$$\psi_x(0) = l'_{x_0}[\lambda] = \beta_0, \qquad \psi_x(T) = -l'_{x_T}[\lambda] = -\beta_T, \tag{3.3}$$

$$\psi_z(0) = l'_{z_0}[\lambda] = \alpha_0, \qquad \psi_z(T) = l'_{z_T}[\lambda] = 0, \tag{3.4}$$

и условие максимальности:

$$H[\lambda](\hat{z}, \hat{x}, \hat{u}) = \max_{|u| \leq 1} H[\lambda](\hat{z}, \hat{x}, u) = \text{const} \geq 0. \tag{3.5}$$

Из (3.5) вытекает, что $\psi_x \cdot \sum \hat{u}_i r_i(\hat{x}) = \text{const} \geq 0$,

тогда из (3.2) имеем $\dot{\psi}_z = -\text{const}$, а из (3.4) следует

$$\psi_z(0) - \psi_z(T) = \alpha_0 = \int_0^T \text{const}\ dt,$$

поэтому величина

$$\text{const} = \psi_x \cdot \sum \hat{u}_i r_i(\hat{x}) = \frac{\alpha_0}{T} \geq 0. \tag{3.6}$$

Условимся теперь о некоторых терминах. *Траекторией* в задаче (Z) будем называть допустимую тройку $w = (z, x, u)$. Учитывая, что u однозначно определяется по z, x из системы (2.1), а выбор z влияет лишь на параметризацию одной и той же кривой в пространстве x, иногда будем называть траекторией саму функцию $x(t)$.

Экстремалью, следуя А.А.Милютину, будем называть пару (λ, w), где w – траектория, а λ – соответствующий ей набор множителей Лагранжа, удовлетворяющий всем вышеуказанным соотношениям, кроме нетривиальности. (В [13] такая пара называется биэкстремалью.)

Таким образом, одной и той же траектории могут соответствовать разные экстремали, или не соответствовать ни одной. (В работах дифгеометров (см. [11, 13, 15]) переход от траектории к экстремали называется гамильтоновым лифтом.) Экстремаль (λ, w) называется *тривиальной*, если $\lambda = 0$, в противном случае экстремаль *нетривиальна.*

Множество всех λ, удовлетворяющих соотношениям (3.1) – (3.5) для данной траектории $\hat{w}$ задачи (Z) и нормировке

$$\alpha_0 + |\beta_0| + |\beta_T| + \max_t |\psi(t)| = 1,$$

мы обозначаем $\Lambda(Z, \hat{w})$, опуская Z и $\hat{w}$, если это не вызывает недоразумений. Легко видеть, что $\Lambda(Z, \hat{w})$ есть конечномерный компакт, поскольку каждое λ определяется своими α, β; поэтому выбор нормировки в его определении для нас будет, по существу, не важен.

Траектория $\hat{w}$ называется *стационарной* в задаче (Z), если $\Lambda(Z, \hat{w})$ непусто, т.е. если она дополняется до нетривиальной экстремали $(\lambda, \hat{w})$. (До тривиальной экстремали дополняется любая допустимая траектория.)

Для каждого $\lambda \in \Lambda(Z, \hat{w})$ возможны два существенно различных случая:

$$1)\ \alpha_0 > 0, \qquad \text{и} \qquad 2)\ \alpha_0 = 0.$$

Если $\alpha_0 > 0$, то экстремаль $(\lambda, \hat{w})$ называется *нормальной.* В этом случае из (3.5), (3.6) вытекает:

$$\sum \hat{u}_i (\psi_x, r_i(\hat{x})) \;=\; \max_{|u|\le 1} \sum u_i (\psi_x, r_i(\hat{x})) \;=\; \frac{\alpha_0}{T} > 0, \tag{3.7}$$

и поскольку единичный шар в евклидовой метрике есть строго выпуклое множество, управление $\hat{u}(t)$ однозначно выражается через $\psi_x(t)$, а именно, $\hat{u}_i(t) = c\,(\psi_x(t), r_i(\hat{x}(t)))$, $i = 0, 1, \ldots, k-1$, где c – некоторая константа.

Если $\alpha_0 = 0$, то экстремаль $(\lambda, \hat{w})$ называется *анормальной.* Этот термин возник еще в КВИ [1] для обозначения вырожденного случая в том смысле, что функционал задачи не входит в необходимые условия первого порядка. Для задачи (Z) в этом случае из (3.5) вытекает, что

$$\psi_x(t)\, r_i(\hat{x}(t)) = 0 \qquad \forall\, i = 0, 1, \ldots, k-1, \qquad \text{т.е. } \psi_x(t) \perp \Gamma(\hat{x}(t)), \tag{3.8}$$

так что условие (3.5) не выделяет $\hat{u}$ из всего единичного шара. В оптимальном управлении в такой ситуации говорят, что управление $\hat{u}$ *особое* относительно множества $|u| \le 1$ (а учитывая, что это происходит в каждый момент времени, иногда говорят даже, что управление $\hat{u}$ *полностью особое*, но мы не будем употреблять этот "усиленный"термин). Нетрудно заметить, что и обратно, из (3.8) вытекает, в силу (3.7), что $\alpha_0 = 0$. Таким образом, равенство $\alpha_0 = 0$ эквивалентно выполнению (3.8), т.е. в задаче (Z) анормальность экстремали $(\lambda, \hat{w})$ эквивалентна ее особости.

Итак, нетривиальная экстремаль $(\lambda, \hat{w})$ может быть либо нормальной $(\alpha_0 > 0)$, либо анормальной, или, что для задачи (Z) эквивалентно, особой $(\alpha_0 = 0)$.

Стационарную траекторию $\hat{w}$ будем называть *нормальной*, если $\forall\, \lambda \in \Lambda(\hat{w})$ имеем $\alpha_0 > 0$; *анормальной*, если $\exists\, \lambda \in \Lambda(\hat{w})$, для которого $\alpha_0 = 0$; и *строго анормальной* или *особой*, если $\forall\, \lambda \in \Lambda(\hat{w})$ будет $\alpha_0 = 0$.

(Это понятие особости соответствует общему понятию особого ограничения в абстрактной задаче на экстремум; см. [18]. В данном случае особым является целевой функционал задачи, т.к. именно ему соответствует множитель α_0 .)

Заметим, что если траектория $\hat{w}$ анормальна, то множество $\Lambda(\hat{w})$ всегда состоит более чем из одного элемента, поскольку в этом случае вместе с любым $\lambda \in \Lambda(\hat{w})$ также и $-\lambda \in \Lambda(\hat{w})$.

Анормальность $\hat{w}$ означает, что ограничения равенства (2.1), (2.2) задачи (Z) вырождены в первом порядке, т.е. не удовлетворяют известным условиям теоремы о неявной функции, или, как сейчас принято говорить, условию Люстерника: производная оператора, задающего равенства, должна быть "на"(т.е. сюрьективной). Если мы рассмотрим оператор

$$g:\ R \times AC \times L_\infty[0,T] \ \longrightarrow\ L_1[0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n,$$

$$(z, x, u) \ \longmapsto\ (\dot{x} - z \sum u_i r_i(x),\ x(0),\ x(T)),$$

то условие Люстерника означает, что $g'(\hat{w})$ – "на", а анормальность $\hat{w}$ означает, что $\operatorname{Im} g'(\hat{w})$ не есть все пространство образов.
Иногда вместо этого "исходного"оператора равенств рассматривают оператор

$$p:\ L_\infty[0,T] \longrightarrow \mathbb{R}^n, \qquad u \mapsto x(T),$$

где x есть решение уравнения $\dot{x} = \hat{z} \sum u_i r_i(x)$ с начальным условием $x(0) = a$. Нетрудно убедиться, что производные $g'(\hat{w})$ и $p'(\hat{u})$ одновременно сюрьективны или нет. (Это вытекает из общего факта: если даны линейные операторы $A : X \to Y$ и $B : X \xrightarrow{\text{на}} Z$, то совместный оператор $(A, B) :\ X \to Y \times Z$ будет сюрьективным тогда и только тогда, когда сюрьективен оператор $A :\, \ker B \to Y$.)
Таким образом, в задаче (Z) анормальность $\hat{w}$, т.е. существование $\lambda \in \Lambda(\hat{w})$ с $\alpha_0 = 0$, эквивалентна вырожденности оператора g или p в точке $\hat{w}$. Стоит отметить, что в общем случае вырожденность ограничений равенства есть более сильное условие, чем существование $\lambda \in \Lambda(\hat{w})$ с $\alpha_0 = 0$ (равенства могут быть невырожденными, но может существовать $\lambda \in \Lambda(\hat{w})$ с $\alpha_0 = 0$).

Заметим, что в задаче (Z) весь набор $\lambda = (\alpha_0, \beta_0, \beta_T, \psi_x, \psi_z)$ определяется по функции $\psi_x(t)$, которую далее мы обозначаем просто $\psi(t)$ (вектора β_0, β_T определяются из условий трансверсальности (3.3), числа α_0 и ψ_z из равенства (3.6), сопряженного уравнения (3.2) и условий трансверсальности (3.4).) Поэтому вместо множества $\Lambda(\hat{w})$ можно рассматривать его проекцию на компоненту ψ_x, которая обозначается $\Psi(\hat{w})$.

Для анормальной экстремали $\alpha_0 = 0$ и $\psi_z = 0$, а функция $\psi = \psi_x$ удовлетворяет сопряженному уравнению (3.1):

$$\dot{\psi} = -\psi \cdot \sum \hat{u}_i r_i'(\hat{x}) \tag{3.9}$$

и равенствам (3.8):

$$\psi(t)\, r_i(\hat{x}(t)) = 0, \qquad i = 0, 1, \ldots, k-1. \tag{3.10}$$

Множество всех ненулевых липшицевых $n-$ мерных функций $\psi(t)$, удовлетворяющих (3.9) и (3.10) с нормировкой $|\psi(0)| = 1$, обозначим $\Psi_0(Z, \hat{w})$, опуская иногда Z и $\hat{w}$. Это те $\psi \in \Psi$, для которых $\alpha_0 = 0$. Таким образом, траектория $\hat{w}$ анормальна тогда и только тогда, когда существует функция $\psi(t)$, удовлетворяющая указанным условиям, т.е. когда множество $\Psi_0(\hat{w})$ непусто. Траектории с непустым $\Lambda(\hat{w})$, но с пустым $\Psi_0(\hat{w})$, являются нормальными стационарными траекториями. Для особых траекторий, очевидно, $\Psi(\hat{w}) = \Psi_0(\hat{w})$.

Выпишем теперь ПМ для задачи (Z) в случае субметрики общего вида, порождающей смешанное ограничение

$$\varphi(x, u) \le 1. \tag{3.11}$$

Напомним, что в силу принятых предположений функция φ непрерывна по паре (x, u) и сублинейна по u. Будем пока считать, что φ дифференцируема в некоторой трубке около траектории $(\hat{x}(t), \hat{u}(t))$, и ее производные непрерывны в точках этой траектории. Это свойство будет нужно нам только для выписывания ПМ в задаче (Z). Далее, начиная с §4, мы не будем пользоваться ПМ в этой задаче с исходным ограничением (3.11), т.к. перейдем к задаче (Z) с некоторым более широким ограничением.

ПМ для задач со смешанными ограничениями, являющийся обобщением ПМ Понтрягина, был получен в конце 1960-х годов А.Я.Дубовицким и А.А.Милютиным (см. [2, 3]) и Л.Нойштадтом и К.Маковским [4]. Применительно к задаче (Z) с ограничением (3.11) он будет отличаться от вышеприведенного ПМ (для ограничения $|u| \le 1$) лишь тем, что ограничению (3.11) соответствует свой множитель $\mu(\cdot) \in L_1[0, T]$, $\mu(t) \ge 0$ п.в., удовлетворяющий условию дополняющей нежесткости

$$\mu(t)\Big(\varphi(\hat{x}(t), \hat{u}(t)) - 1\Big) = 0 \qquad \text{п.в. на } [0, T], \tag{3.12}$$

который войдет также в сопряженное уравнение:

$$\dot{\psi} = \; -\hat{z}\,\psi \sum u_i\, r_i'(\hat{x}) \; + \; \mu(t)\,\frac{\partial \varphi}{\partial x}(\hat{x}, \hat{u}), \tag{3.13}$$

и в еще одно, дополнительное условие – условие стационарности по u :

$$\hat{z}\,(\psi, r_i(\hat{x})) - \mu(t)\,\frac{\partial \varphi}{\partial u}(\hat{x}, \hat{u}) = 0 \qquad \forall\, i = 0, 1, \ldots, k-1. \tag{3.14}$$

Условие максимума приобретает вид:

$$\max_{u \in U(\hat{x}(t))} H[\lambda](\hat{z}, \hat{x}(t), u) \; = \; H[\lambda](\hat{z}, \hat{x}(t), \hat{u}(t)) \; = \text{const} \; \geq 0. \tag{3.15}$$

Остальные условия остаются теми же. Как и ранее, все множители выражаются через $\psi = \psi_x$. По-прежнему

$$\max_u H(\hat{z}, \hat{x}, u) = \hat{H} = H(\hat{z}, \hat{x}, \hat{u}) = \hat{z} \sum \hat{u}_i(\psi_i, r_i(\hat{x})) = \text{const} \; = \frac{\alpha_0}{T};$$

отсюда из (3.14) и (3.12)

$$\mu(t) = \mu(t)\,\varphi(\hat{x}, \hat{u}) = \mu(t) \sum (\frac{\partial \varphi}{\partial u_i}, \hat{u}_i) = \hat{z} \sum \hat{u}_i\,(\psi, r_i(\hat{x})) = \hat{H} = \frac{\alpha_0}{T}, \tag{3.16}$$

и следовательно, $\mu(t) = \text{const} \; = \hat{H}$. Если экстремаль $(\lambda, \hat{w})$ анормальна, т.е. $\alpha_0 = 0$, то в силу (3.16) и $\mu(t) = 0$ почти всюду, т.е. новый элемент в ПМ на самом деле исчезает.

Отсюда вытекает, что если $(\lambda, \hat{w})$ – анормальная экстремаль в задаче (Z) с ограничением (3.11), то она будет анормальной экстремалью и в задаче (Z) с любым другим (гладким) смешанным ограничением $p(x, u) \leq 0$ (не обязательно связанным с некоторой субметрикой), в частности, с ограничением $p(x, u) = (l(x),\, u - v(x)) \leq 0$, где l, v - из определения опорной гиперплоскости, а также при свободном u, т.е. с ограничением $u \in \mathbb{R}^k$.

Обратим внимание, что если экстремаль нормальная, то в силу (3.16) $\mu(t) = \frac{\alpha_0}{T} > 0$, и тогда из условия максимальности (3.15) или дополняющей нежесткости (3.12) вытекает, что $\varphi(\hat{x}(t), \hat{u}(t)) \equiv 1$, т.е. движение происходит с максимально возможной скоростью. Если же $\alpha_0 = 0$, т.е. экстремаль анормальна, то это равенство не вытекает из ПМ. Тем не менее мы всегда можем считать его выполненым в силу следующего соображения. Если на каком-то интервале времени $\varphi(\hat{x}(t), \hat{u}(t)) < 1$, то можно рассмотреть новое управление $u'(t) = c(t)\hat{u}(t)$, где $c(t) > 1$ на этом интервале, и $c(t) = 1$ вне него. У соответствующей траектории $(\hat{z}, x'(t), u'(t))$ фазовая компонента $x'(t)$ будет двигаться по той же кривой $\hat{\chi}$, но будет проходить путь от a до b за меньшее время T'. Тогда за время $T > T'$ можно пройти этот же путь с меньшим ограничением скорости $z' < z$. Следовательно, данная траектория $\hat{w}$ не будет точкой даже слабого минимума в задаче (Z). Таким образом, будем считать, что для исследуемой траектории $\varphi(\hat{x}(t), \hat{u}(t)) \equiv 1$.

Вернемся к вопросу о расширении допустимого множества управлений. Пусть функции $l(x)$, $v(x)$ из определения опорной гиперплоскости таковы, что в окрестности множества $\hat{\chi}$

$$\varphi(x, v(x)) = 1, \qquad (l(x), v(x)) = 1, \tag{3.17}$$

т.е. множество $U(x)$ содержится в полупространстве $(l(x), u) \leq 1$. (Этого всегда можно добиться соответствующей нормировкой этих функций.) Задачу (Z) с ограничением $\varphi_*(x, u) = (l(x), u) \leq 1$ будем называть задачей (Z_*). Она является расширением задачи (Z) с исходным ограничением $\varphi(x, u) \leq 1$.

Лемма 3.1. Если $(\lambda, \hat{w})$ есть экстремаль в задаче (Z) с ограничением $\varphi(x, u) \leq 1$, то она будет экстремалью и в задаче (Z_*) с ограничением $\varphi_*(x, u) \leq 1$.

Доказательство. Для анормальных экстремалей это утверждение, как уже было сказано, очевидно. Поэтому достаточно рассмотреть случай, когда для данной экстремали $\alpha_0 > 0$. По условию для всех x из некоторой окрестности $\hat{\chi}$ неравенство $\varphi(x, u) \leq 1$ влечет $\varphi_*(x, u) \leq 1$, а при $u = v(x)$ оба этих неравенства превращаются в равенства. Тогда в окрестности любой точки вида $(x_0,\, u_0 = v(x_0))$ выполнено неравенство $\varphi_*(x, u) \leq \varphi(x, u)$. (Действительно, так как в самой этой точке $\varphi = \varphi_* = 1$, то в е„ окрестности обе эти функции положительны; если $\varphi(x, u) = c > 0$, то $\varphi(x, u/c) = 1$, поэтому $\varphi_*(x, u/c) \leq 1$, т.е. $\varphi_*(x, u) \leq c$, ч.т.д.) Отсюда следует, что в любой такой точке градиенты функций φ и φ_* колинеарны. А поскольку по u обе эти функции сублинейны, и в точке $u_0 = v(x_0)$ равны и положительны, то их градиенты по u просто равны, и при этом не равны нулю. Но тогда и их градиенты по x также равны, т.е. в итоге $\operatorname{grad} \varphi = \operatorname{grad} \varphi_*$ в любой точке $(x_0,\, u_0 = v(x_0))$. Но тогда для данного λ равенства (3.13), (3.14) будут выполнены не только с функцией φ, но и с φ_*, т.е. $\lambda \in \Lambda(Z_*, \hat{w})$, или, что то же самое, $(\lambda, \hat{w})$ – экстремаль в задаче (Z_*). Лемма доказана.

Следствие 1. Множество $\Lambda(\hat{w})$ в задачах (Z) и (Z_*) одно и то же.

Действительно, так как при переходе от ограничения $\varphi \leq 1$ к $\varphi_* \leq 1$ допустимое множество расширяется, то множество $\Lambda(\hat{w})$ может лишь сузиться. Но согласно лемме 3.1 никакого сужения не происходит, следовательно, эти множества совпадают.

Отсюда сразу вытекает

Следствие 2. Траектория $\hat{w}$ особая в задаче (Z) тогда и только тогда, когда она особая в задаче (Z_*).

Кроме того, справедливо

Следствие 3. Если траектория $\hat{w}$ особая в задаче (Z) с ограничением $\varphi(x,u) \leq 1$, то она будет стационарной, и следовательно, автоматически будет особой и при свободном u. Множество $\Lambda(\hat{w})$ при этом не изменится.

Действительно, при переходе от ограничения $\varphi(x,u) \leq 1$ к $u \in \mathbb{R}^k$ множество $\Lambda(\hat{w})$ может лишь сузиться. Однако, поскольку для особой траектории любое $\lambda \in \Lambda(\hat{w})$ имеет $\mu(t) = 0$, то, как уже говорилось, равенства (3.13), (3.14) (единственные соотношения в ПМ, содержащие φ) будут выполняться и для задачи со свободным u. Таким образом, при этом переходе траектория $\hat{w}$ останется стационарной, а множество $\Lambda(\hat{w})$ не изменится.

Отметим, что если экстремаль нормальна, то соответствующая функция Лагранжа $L[\lambda](w) = -H[\lambda](z,x,u) + \mu\varphi(x,u)$ имеет коэффициент $L_{uu}[\lambda] = \mu\varphi_{uu}$ (мы учли здесь, что $H_{uu}[\lambda] = 0$), и считая, что матрица φ_{uu} положительно определена на подпространстве $\varphi_u\bar{u} = 0$ вдоль траектории $\hat{w}(t)$ (что всегда выполнено в случае субримановой метрики), получаем, что для данной экстремали выполнено усиленное условие Лежандра. Поэтому случай нормальной экстремали может быть рассмотрен в рамках КВИ; см. напр. [13]. Однако для анормальных экстремалей $L_{uu}[\lambda] = 0$, т.е. основное предположение КВИ – усиленное условие Лежандра – не выполнено, и поэтому такой случай требует специального рассмотрения. Именно он и является предметом данной статьи.

4 Переход к присоединенному базису

До сих пор все наши рассмотрения происходили в произвольном базисе. Теперь мы будем рассматривать некоторые специальные базисы.

Определение 4.1. Следуя А.А.Милютину [17], базис в $\Gamma(x)$ будем называть *присоединенным* для траектории $\hat{x}(t)$, если $r_0(\hat{x}(t)) = \dot{\hat{x}}(t)$ на $[0,T]$.

В любом таком базисе исследуемое управление есть $\hat{u}(t) = (1,0,\ldots,0)$. Фазовые компоненты $\hat{z}$ и $\hat{x}(t)$ остаются неизменными, т.к. они не зависят от выбора базиса в $\Gamma(x)$.

Определение 4.2. Присоединенный базис в $\Gamma(x)$ будем называть *опорным (строго опорным)* для субметрики q, если в дополнение к вышеуказанному свойству в некоторой окрестности $\hat{\chi}$ подпространство $\Gamma_0(x) = \mathrm{Lin}\,\{r_1(x),\ldots,r_{k-1}(x)\}$ является опорной (строгой опорной) гиперплоскостью к годографу $F(x)$ субметрики q в смысле определений 2.1, 2.2.

Существование дважды гладкого присоединенного базиса, опорного (строго опорного) для данной субметрики, обеспечено предположением A2 (соответственно A3). Задача (Z) в присоединенном опорном базисе имеет тот же вид, что и в §2, но теперь в записи управляемой системы будем выделять член с $i = 0$:

Задача (Z):

$$\dot{x} = z\left(u_0 r_0(x) + \sum_{i=1}^{k-1} u_i r_i(x)\right), \tag{4.1}$$

$$\dot{z} = 0, \qquad x(0) = a, \quad x(T) = b, \tag{4.2}$$

$$u = (u_0, u_1, \ldots, u_{k-1}) \in U(x),$$

$$J = z(0) \longrightarrow \min .$$

Кроме того, для удобства положим $\hat{z} = 1$ (сделав, если необходимо, линейную замену времени); тогда T есть время движения.

Именно для этой задачи (Z) в присоединенном опорном базисе мы будем применять квадратичные достаточные условия понтрягинского и сильного минимума, полученные для задач общего вида в [18]. Это будет наша "стартовая"позиция.

Как уже говорилось, в случае субримановой метрики можно считать, что $U(x)$ есть единичный шар, не зависящий от x. В случае же произвольной субметрики допустимое множество управлений зависит от x, т.е. имеется смешанное ограничение на x, u, и это не очень удобно, т.к. квадратичные условия, полученные в [18] (а они являются наиболее общими из известных), не допускают присутствия смешанных ограничений.

Однако для получения достаточных условий эта трудность легко преодолима. Как и в [18], мы заменим семейство множеств $U(x)$ на объемлющее его постоянное множество $\tilde{U}$. Ясно, что любое достаточное условие для минимума некоторого типа (понтрягинского, сильного) в задаче (Z) с множеством $\tilde{U}$ будет автоматически достаточным условием для минимума того же типа и в задаче (Z) с множеством $U(x)$.

При этом для получения достаточных условий $\Pi-$ минимума мы принимаем предположение A2 и в качестве $\tilde{U}$ берем просто полупространство $U_* = \{u_0 \le 1\}$. Из определения 4.2 следует, что оно действительно содержит $U(x)$ для всех x из некоторой окрестности множества $\hat{\chi}$. Если траектория была особой в задаче (Z) с множеством $U(x)$, то согласно следствию 2 из леммы 3.1, при переходе к множеству U_* она останется особой.

Для получения достаточных условий сильного минимума принимается предположение A3. Тогда из определения 4.2 следует, что в соответствующем присоединенном базисе, строго опорном для данной субметрики, при любом x из некоторой окрестности множества $\hat{\chi}$ гиперплоскость $u_0 = 1$ является строгой опорной к множеству $U(x)$ в точке $\hat{u} = (1, 0, \ldots, 0)$, т.е. $\hat{u}$ является единственной точкой максимума линейного функционала $p(u) = u_0$ на множестве $U(x) \subset \mathbb{R}^k$.

Из сублинейности и положительности $\varphi(x,\cdot)$ вытекает, что множество $U(x)$ есть компакт, а из непрерывности φ — что оно непрерывно по Хаусдорфу зависит от x. Тогда можно утверждать, что существует выпуклый компакт $\tilde{U} \subset \mathbb{R}^k$, также имеющий $\hat{u}$ единственной точкой максимума функционала $p(u) = u_0$, и такой, что $U(x) \subset \tilde{U}$ для любого x из некоторой окрестности $\hat{\chi}$. (Доказательство этого факта отнесено в Приложение B.)

Мы рассмотрим сначала случай сильного минимума. (Случай понтрягинского минимума рассматривается ниже в части III.)

Будем изучать задачу (Z) с указанным множеством управлений $\tilde{U}$, не зависящим от x. Назов„м е„ задачей $(\tilde{Z})$. Отметим, что конкретный вид множества $\tilde{U}$ для нас не важен, нам важно лишь его существование; далее от этого множества мы перейдем к содержащему его полупространству U_*, а оно не зависит от выбора $\tilde{U}$.

Итак, случай произвольной субметрики (удовлетворяющей предположению A3) приводит нас в некотором присоединенном базисе к задаче $(\tilde{Z})$ с выпуклым компактом $\tilde{U}$, не зависящим от x, для которого $\hat{u} = (1, 0, \ldots, 0)$ есть единственная точка максимума линейного функционала $p(u) = u_0$. (В случае субримановой метрики $U(x)$ есть единичный круг, поэтому никакого перехода к $\tilde{U}$ делать не требуется.) Исследуемая траектория по-прежнему есть $\hat{w} = (\hat{z} = 1, \hat{x}(t), \hat{u} = (1, 0, \ldots, 0))$. Из следствия 1 из леммы 3.1 вытекает

Лемма 4.1. Множество $\Lambda(\hat{w})$ в задачах (Z) и $(\tilde{Z})$ одно и то же.

Действительно, так как $U(x) \subset \tilde{U} \subset U_*$, то множество $\Lambda(\hat{w})$ для задачи $(\tilde{Z})$ занимает промежуточное положение между $\Lambda(Z, \hat{w})$ и $\Lambda(Z_*, \hat{w})$, а поскольку эти два множества совпадают, то и $\Lambda(\tilde{Z}, \hat{w})$ совпадает с ними.

Отсюда следует, что особость траектории $\hat{w}$ в задаче (Z) эквивалентна е„ особости в задаче $(\tilde{Z})$ и задаче (Z_*). Мы предполагаем, что $\hat{w}$ особая, и наша цель с этого момента — получить достаточные условия для наличия сильного минимума в задаче $(\tilde{Z})$ на данной траектории. Теперь мы можем применить результаты из [18] к этой ситуации.

5 Применение общих достаточных условий к задаче $(\tilde{Z})$

Согласно [18, §8], для получения достаточных условий в задаче $(\tilde{Z})$ мы должны рассмотреть следующую задачу (Z_*) с расширенным множеством управлений U_*

в виде полупространства:

Задача (Z_*) **:**

$$\dot{x} = z\left(u_0 r_0(x) + \sum_{i=1}^{k-1} u_i r_i(x)\right), \tag{5.1}$$

$$\dot{z} = 0, \qquad x(0) = a, \quad x(T) = b, \tag{5.2}$$

$$u_0 \le 1, \quad \text{компоненты } u_1, \ldots, u_{k-1} \text{ свободны},$$

$$J = z(0) \longrightarrow \min,$$

в которой исследуется та же особая траектория $\hat{w}$. Очевидно, это расширение не зависит от конкретной реализации множества $\tilde{U}$: полупространство будет одним и тем же $(u_0 \le 1)$. При этом квадратичные достаточные условия слабого минимума в задаче (Z_*) обеспечивают сильный минимум в задаче $(\tilde{Z})$. Точнее, теорема 8.1 из [18] применительно к данной ситуации дает следующий результат.

Теорема 5.1. Пусть для особой траектории $\hat{w}$ в задаче (Z_*) выполнено $\gamma-$ достаточное условие слабого минимума. Тогда $\hat{w}$ есть точка строгого сильного минимума в задаче $(\tilde{Z})$. Более того, при некоторых $\varepsilon, C > 0$ на множестве $|z - 1| + ||x - \hat{x}||_\infty < \varepsilon$ для любых $w = (z, x, u)$, удовлетворяющих уравнениям (5.1), $\dot{z} = 0$ и ограничениям $x(0) = a$, $u \in \tilde{U}$, выполняется оценка

$$(z-1)^+ + |x(T) - b| \;\ge\; C\gamma(w - \hat{w}). \tag{5.3}$$

Теперь можно, пользуясь формулами из [18, §4,5] и [19], выписать $\gamma-$ достаточное условие для задачи (Z_*), и тем самым получить достаточное условие для сильного минимума в задаче $(\tilde{Z})$. Однако мы поступим по-другому. Мы покажем, что от $\gamma-$ достаточного условия в задаче (Z_*) можно перейти к $\gamma-$ достаточному условию в другой, более простой задаче (отличающейся главным образом тем, что в ней ограничение неравенства $u_0 \le 1$ заменяется на равенство $u_0 = 1)$, и затем к некоторой системе, соответствующей исследованию траектории $\hat{w}$ на жесткость. При этом слабая $\gamma-$ достаточность в задаче (Z_*) окажется в точности эквивалентной $\gamma-$ достаточному условию жесткости. Эффективным инструментом для совершения этих переходов нам будет служить теорема 5.2 из [18] о "вневариационном"эквиваленте $\gamma-$ достаточных условий.

Сначала сделаем довольно простой переход от $\gamma-$ условий в задаче (Z_*) к $\gamma-$ условиям в новой задаче (S), отличающейся от задачи (Z_*) лишь тем, что в управляемой системе множитель z стоит только перед самым первым членом:

$$\dot{x} = \; z\, u_0\, r_0(x) \,+\, \sum_{i=1}^{k-1} u_i\, r_i(x)\;. \tag{5.4}$$

Теорема 5.2. $\gamma-$ достаточное условие слабого минимума в задаче (Z_*) эквивалентно $\gamma-$ достаточному условию слабого минимума в задаче (S).

С учетом теоремы 5.2 (а) из [18] это утверждение вытекает из следующего интуитивно очевидного свойства. Напомним, что для задачи (Z_*) *функция нарушения* определяется как

$$\sigma(w) = \int_0^T \left| \dot x - z\left(u_0 r_0(x) + \sum_{i=1}^{k-1} u_i r_i(x)\right)\right| dt \;+\; \int_0^T |\dot z|\, dt\, + \tag{5.5}$$

$$+\, |x(0)-a| + |x(T)-b| \;+\; \operatorname{vrai}\max_t\, (u_0-1)^+ \;+\; (z-1)^+\,,$$

и аналогично определяется функция нарушения для задачи (S).

Лемма 5.1. Выполнение неравенства $\sigma(w) \ge C\gamma(w)$ при некотором $C>0$ в некоторой окрестности точки $\hat w$ для задачи (Z_*) эквивалентно его выполнению при некотором $C>0$ в некоторой окрестности точки $\hat w$ для задачи (S).

Доказательство вытекает из того простого факта, что при z, близком к $\hat z = 1$, отображение $A:\; W \to W$,

$$w = (z,\, x,\, u_0,\, u_i,\; i=1,\dots,k-1) \longmapsto \tilde w = (z,\, x,\, u_0,\, \tilde u_i = \frac{u_i}{z},\; i=1,\dots,k-1)$$

является гомеоморфизмом, а функции нарушения в этих двух задачах связаны равенством $\sigma_*(w) = \sigma_S(Aw)$. Для обеих задач

$$\gamma(w) = |z-1|^2 + \bar y_0^2(T) + \sum_{i=1}^{k-1} y_i^2(T) + \int_0^T \left(\bar y_0^2 + \sum_{i=1}^{k-1} y_i^2\right) dt, \tag{5.6}$$

где $\bar y_0(t) = y_0(t) - t$,

$$\dot y_i = u_i, \qquad y_i(0) = 0 \qquad \forall\, i = 0,1,\dots,k-1, \tag{5.7}$$

и при отображении A поменяются лишь компоненты $y_i,\; i\ge 1$, поэтому при $|z-1| \le \frac12$, т.е. $\frac12 \le z \le \frac32$ будем иметь

$$\frac49\,\gamma(w) \;\le\; \gamma(Aw) \;\le\; 4\gamma(w).$$

Таким образом, если $\sigma_*(w) \ge C\gamma(w)$ в некоторой окрестности $\hat w$, то на том же множестве $\sigma_S(Aw) \ge \frac{C}{4}\gamma(Aw)$, и следовательно, в некоторой окрестности $\hat w$ будет $\sigma_S(\tilde w) \ge \frac{C}{4}\gamma(\tilde w)$. Точно так же справедлив и обратный переход. Лемма доказана.

6 Переход к $u_0 = 1$

Итак, мы перешли к $\gamma-$ достаточности в задаче (S). Теперь покажем, что можно перейти от полупространства $u_0 \le 1$ к подпространству $u_0 = 1,$ т.е. к следующей

Задаче (S_1) **:**

$$\dot{x} = \; z\, r_0(x) \; + \; \sum_{i=1}^{k-1} u_i\, r_i(x), \tag{6.1}$$

$$\dot{z} = 0, \qquad x(0) = a, \quad x(T) = b,$$

$$J = z(0) \longrightarrow \min .$$

Здесь уравнение (6.1) получено из уравнения (5.4) подстановкой $u_0 = 1.$ Так как u_0 исчезло, то здесь уже не $k,$ а $k-1$ управлений, и все они свободны. Исследуемая траектория (будем обозначать ее той же буквой) есть $\hat{w} = (\hat{z} = 1,\, \hat{x}(t),\; \hat{u}_i = 0,\, i = 1, \ldots, k-1),$ а управление $\hat{u} = (0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^{k-1}.$ Отметим, что в системах, где присутствует компонента $u_0,$ управление $\hat{u} = (1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^k.$ Надеемся, что из контекста всегда ясно, о каком $\hat{u}$ идет речь, и что недоразумений здесь не возникнет.

При переходе от задачи (S) к задаче (S_1) множество допустимых траекторий сузилось (из-за сужения множества допустимых управлений), поэтому множество наборов Лагранжа $\Lambda(\hat{w})$ может расшириться, и априори есть опасность, что могут появиться "нормальные"наборы $\lambda,$ с $\alpha_0 > 0.$ Однако в данном случае этого не происходит.

Лемма 6.1. В задачах (S) и (S_1) множество $\Lambda(\hat{w})$ одно и то же.

Доказательство. Как уже говорилось, включение $\Lambda(\hat{w}) \subset \Lambda_1(\hat{w})$ очевидно. Обратно, если $\lambda \in \Lambda_1(\hat{w}),$ т.е. данное λ обеспечивает выполнение ПМ в задаче $(S_1),$ то

$$\psi(t)\, r_i(\hat{x}(t)) = 0 \qquad \forall\, i = 1, \ldots, k-1, \tag{6.2}$$

и, как и в §3, легко получаем

$$\psi(t)\, r_0(\hat{x}(t)) = \text{const} \; = \frac{\alpha_0}{T} \ge 0. \tag{6.3}$$

Но тогда данное λ обеспечивает выполнение ПМ и в задаче (S), т.е. $\lambda \in \Lambda(\hat{w}).$ (Поясним, что для произвольной стационарной траектории в задачах (S) и (S_1) не требуется, чтобы $\alpha_0 = 0.$) Лемма доказана.

Теорема 6.1. $\gamma-$ достаточное условие слабого минимума в задаче (S) эквивалентно $\gamma-$ достаточному условию слабого минимума в задаче (S_1).

Доказательство опять использует "вневариационную"трактовку этих условий.

Заметим, что и система (5.4), $\dot{z} = 0$ с начальным условием $x(0) = a$, и система (6.1), $\dot{z} = 0$ с начальным условием $x(0) = a$ очевидным образом удовлетворяют условию Люстерника на $\hat{w}$, и введем следующие два множества:

$$\mathcal{D}(S) = \{w \,|\, \text{выполнено уравнение (5.4)},\ \dot{z} = 0,\ x(0) = a,\ u_0 \le 1\},$$

$$\mathcal{D}(S_1) = \{w \,|\, \text{выполнено уравнение (5.4)},\ \dot{z} = 0,\ x(0) = a,\ u_0 = 1\}.$$

С учетом теоремы 5.2 (b) из [18], доказательство теоремы 6.1 вытекает из следующей

Леммы 6.2. Выполнение неравенства $\sigma(w) \ge C\gamma(w)$ при некотором $C > 0$ на множестве $\mathcal{D}(S)$ в некоторой $L_\infty-$ окрестности точки $\hat{w}$ для задачи (S) эквивалентно его выполнению при некотором $C > 0$ на множестве $\mathcal{D}(S_1)$ в некоторой $L_\infty-$ окрестности точки $\hat{w}$ для для задачи (S_1).

(Поясним здесь, что для точки w, удовлетворяющей уравнению (5.1), ее близость к $\hat{w}$ в норме пространства W эквивалентна ее близости к $\hat{w}$ в равномерной $(L_\infty-)$ норме $|z - \hat{z}| + ||x - \hat{x}||_\infty + ||u - \hat{u}||_\infty$. Поэтому мы формулируем лемму 6.2 с участием именно $L_\infty-$ нормы.)

Доказательство. Напомним, что порядок γ для задачи (S) задается формулами (5.6), (5.7), а тогда для задачи (S_1) он получается из них при $\bar{y}_0(t) \equiv 0$. Введем обозначения: $\bar{z} = z - 1$,

$$\eta(y) = \sum_{i=1}^{k-1} y_i^2(T) + \int_0^T \sum_{i=1}^{k-1} y_i^2\, dt\ . \tag{6.4}$$

Обратим внимание, что на $\mathcal{D}(S)$ $\dot{\bar{y}}_0 = u_0 - 1 \le 0$, следовательно, $\bar{y}_0(t)$ монотонна, и так как $\bar{y}_0(0) = 0$, то $\max|\bar{y}_0(t)| \le |\bar{y}_0(T)|$. Поэтому $\int_0^T \bar{y}_0^2\, dt$ можно не включать в γ, поскольку он оценивается через $\bar{y}_0^2(T)$. Таким образом, на множестве $\mathcal{D}(S)$ можно рассматривать

$$\gamma(w) = |\bar{z}|^2 + |\bar{y}_0(T)|^2 + \eta(y), \tag{6.5}$$

а на $\mathcal{D}(S_1)$ эта величина превращается в

$$\gamma_1(w) = |\bar{z}|^2 + \eta(y). \tag{6.6}$$

Так как $\mathcal{D}(S) \supset \mathcal{D}(S_1)$, то в утверждении леммы достаточно доказать импликацию $(\Longleftarrow)$.

Пусть при некотором $\varepsilon > 0$ на множестве $B_\varepsilon(\hat{w}) \cap \mathcal{D}(S_1)$ выполнена оценка

$$\sigma(w) = (z - 1)^+ + |x(T) - b| \ \ge\ C\gamma(w - \hat{w}). \tag{6.7}$$

Покажем, что тогда эта же оценка выполняется и на множестве $B_\delta(\hat{w}) \cap \mathcal{D}(S)$ при некотором $\delta > 0$. Пусть пока $\delta > 0$ произвольно. Возьмем любую точку $w \in B_\delta(\hat{w}) \cap \mathcal{D}(S)$. По определению она удовлетворяет уравнению (5.1) с $u_0 \le 1$, а нам, чтобы получить требуемую оценку, надо перейти к уравнению (6.1), т.е. к уравнению (5.1) с $u_0 = 1$.

Для этого, вспоминая замечание §3, перепараметризуем траекторию w так, чтобы стало $u_0 = 1$. А именно, считая $\delta \le \frac{1}{2}$, имеем $1 - \delta \le u_0(t) \le 1$, и рассмотрим липшицево отображение $s: [0,T] \to [0,T]$, задаваемое свойствами:

$$s(0) = 0, \qquad \dot{s}(t) = \frac{u_0(t)}{\theta}, \tag{6.8}$$

где $\theta = (1/T)\int_0^T u_0(t)\,dt$ есть среднее значение функции $u_0(t)$ на отрезке $[0,T]$. Тогда $s(T) = (1/\theta)\int_0^T u_0(t)\,dt = T$,

$$1 - \delta \le \theta \le 1, \qquad 1 - \delta \le \dot{s}(t) \le \frac{1}{1-\delta}, \tag{6.9}$$

где $1-\delta \ge \frac{1}{2}$, и поэтому $s(t)$ есть взаимно липшицево отображение отрезка $[0,T]$ на себя. Обозначим через $t(s)$ обратное к нему отображение, и введем функции

$$x'(s) = x(t(s)), \qquad u_i'(s) = \theta\,\frac{u_i(t(s))}{u_0(t(s))}, \qquad i = 1,\ldots,k-1. \tag{6.10}$$

Легко убедиться, что тогда

$$\frac{dx'(s)}{ds} = \frac{dx}{dt}\bigg/\frac{ds}{dt} = \ (\theta z)\, r_0(x'(s)) \ + \ \sum_{i=1}^{k-1} u_i'(s)\, r_i(x'(s)). \tag{6.11}$$

Полагая $z' = \theta z$, мы получаем траекторию $w' = (z', x', u_i',\, i = 1,\ldots,k-1)$, удовлетворяющую уравнению (6.1), и тем самым $w' \in \mathcal{D}(S_1)$. Отметим, что $x'(T) = x(T)$, т.е. концы новой и старой траекторий совпадают.

Покажем сначала, что траектория w' близка к $\hat{w}$. Траектория $\hat{w}$ удовлетворяет системе (6.1) с $\hat{z} = 1$, $\hat{u}_i = 0$, $i \ge 1$ и начальным условием $\hat{x}(0) = a$, а траектория w' – системе (6.11) с u_i' и тем же начальным условием $x'(0) = a$, поэтому разность $x' - \hat{x}$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{dt}\,(x' - \hat{x}) = \ z'\,(r_0(x') - r_0(\hat{x})) + (z' - 1)\, r_0(x) + \sum_{i=1}^{k-1} u_i'\, r_i(x'). \tag{6.12}$$

Из (6.9) следует, что $|z' - z| = (1-\theta)|z| \le \delta|z| \le \delta(1+\delta)$, а так как $|z - \hat{z}| \le \delta$, то $|z' - \hat{z}| \le \delta(2+\delta) < 3\delta$.

По условию $||x - \hat{x}||_\infty \le \delta$, поэтому векторы $r_i(x'(t))$, $i = 0,1,\ldots,k-1$ ограничены по модулю общей константой (не зависящей от конкретных значений $x'(t)$), и при этом

$$|\, r_0(x'(t)) - r_0(\hat{x}(t))\,| \le \mathrm{const}\ |x'(t) - \hat{x}(t)|.$$

Так как $||u_i||_\infty \le \delta,$ то из (6.10) вытекает, что $||u_i'||_\infty \le \frac{\delta}{1-\delta},$ а тогда из (6.12) и известных оценок типа Гроноулла следует, что $||x' - \hat{x}||_C \le f(\delta),$ где $f(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0.$ Таким образом, $||w' - \hat{w}||_\infty \le 3\delta + (k-1)\frac{\delta}{1-\delta} + f(\delta) = f_1(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0,$ т.е. близость w' к $\hat{w}$ установлена.

При достаточно малом $\delta > 0$ будем иметь $||w' - \hat{w}||_\infty < \varepsilon,$ $w' \in \mathcal{D}(S_1),$ и тогда по условию леммы для w' выполнена оценка (6.7), т.е.

$$(z'-1)^+ + |x(T) - b| \;\ge\; C\gamma_1(w') \;= C\left(|\bar{z}'|^2 + \eta(y')\right), \tag{6.13}$$

$$\text{где} \qquad \dot{y}_i' = u_i', \quad y_i'(0) = 0, \quad i = 1, \ldots, k-1. \tag{6.14}$$

Нам надо показать, что оценка (6.7) верна для траектории $w,$ т.е. что при некотором $\delta > 0$ и некотором $C > 0,$ не зависящем от $w \in B_\delta(\hat{w}) \cap \mathcal{D}(S),$

$$(z-1)^+ + |x(T) - b| \;\ge\; C\gamma(w) = C\left(|\bar{z}|^2 + |\bar{y}_0(T)|^2 + \eta(y)\right). \tag{6.15}$$

Докажем это от противного. Допустим, что ни при каких $\delta, C > 0$ такой оценки нет на $B_\delta(\hat{w}) \cap \mathcal{D}(S),$ т.е. существует последовательность $w_n = (z_n, x_n, u_n) \in \mathcal{D}(S)$ такая, что $w_n \ne \hat{w},$ $||w_n - \hat{w}|| \to 0,$ и (опуская индекс n)

$$(z-1)^+ + |x(T) - b| \;\le\; o\left(|\bar{z}|^2 + |\bar{y}_0(T)|^2 + \eta(y)\right). \tag{6.16}$$

Покажем тогда, что и для соответствующей последовательности $w_n' \in \mathcal{D}(S_1),$ построенной как показано выше, оценка (6.13) будет нарушаться, т.е. что будет выполняться неравенство (опять опускаем n) :

$$(z'-1)^+ + |x(T) - b| \le o\left(|\bar{z}'|^2 + \eta(y')\right). \tag{6.17}$$

Напомним, что η зада„тся формулой (6.4). Установим сначала, что $\eta(y) \simeq \eta(y')$ (имеют одинаковый порядок, т.е. оцениваются друг через друга с некоторыми константами). В самом деле, согласно (6.14), (6.10) и (6.8), для каждого $i \ge 1$ и любого $\tau \in [0, T]$

$$y_i'(\tau) = \int_0^\tau u_i'(s)\, ds = \int_0^\tau \theta\, \frac{u_i(t(s))}{u_0(t(s))}\, ds = \int_0^{t(\tau)} u_i(t)\, dt = y_i(t(\tau)),$$

(в частности, $y_i'(T) = y_i(T)$), поэтому

$$\int_0^T |y_i'(s)|^2 ds \;= \int_0^T |y_i(t(s))|^2 ds \;= \int_0^T |y_i(t)|^2\, \dot{s}(t)\, dt,$$

откуда в силу (6.9) получаем оценку

$$(1-\delta)\int_0^T |y_i(t)|^2 dt \;\le \int_0^T |y_i'(s)|^2 ds \;\le \frac{1}{1-\delta}\int_0^T |y_i(t)|^2 dt$$

и, следовательно, такая же оценка справедлива для η :

$$(1-\delta)\,\eta(y) \le\; \eta(y') = \int_0^T \sum_{i=1}^{k-1} |y_i'(s)|^2 ds \;+ \sum_{i=1}^{k-1} |y_i'(T)|^2 \;\le \frac{1}{1-\delta}\,\eta(y), \tag{6.18}$$

т.е. действительно $\eta(y) \simeq \eta(y')$.

Далее, положим $p = (1/T)\int_0^T (1-u_0)\,dt = -(1/T)\bar{y}_0(T)$. Тогда $p = 1-\theta$, и согласно (6.9), $0 \le p \le \delta$. При этом

$$\bar{z}' = z' - 1 = \theta z - 1 = \theta(1+\bar{z}) - 1 = \theta\bar{z} + (\theta - 1) = \theta\bar{z} - p, \tag{6.19}$$

откуда, учитывая, что $\theta \le 1$, получаем оценку

$$|\bar{z}'|^2 \le\ |\bar{z}|^2 \,+\, \frac{1}{T^2}\,|\bar{y}_0(T)|^2.$$

С другой стороны, из (6.19) имеем $\theta\bar{z} = \bar{z}' + p$, и учитывая, что $\theta \ge \frac{1}{2}$, получаем

$$|\bar{z}|^2 \le 4\left(|\bar{z}'|^2 \,+\, \frac{1}{T^2}\,|\bar{y}_0(T)|^2\right).$$

В силу этой оценки и (6.18), из (6.16) вытекает:

$$(z-1)^+ + |x(T) - b| \,\le\, o\left(|\bar{z}'|^2 + p^2 + \eta(y')\right). \tag{6.20}$$

Если при этом $p^2 \le \mathcal{O}(|\bar{z}'|^2 + \eta(y'))$, то отсюда и неравенства $z' = \theta z \le z$ очевидным образом вытекает (6.17), и мы приходим к желаемому противоречию.

Остается рассмотреть случай, когда наоборот,

$$p^2 \gg |\bar{z}'|^2 + \eta(y'), \qquad \text{т.е.} \qquad |\bar{z}'|^2 + \eta(y') \le o(p^2). \tag{6.21}$$

Тогда главный член в правой части (6.20) есть p^2, т.е.

$$(\bar{z})^+ + |x(T) - b| \,\le\, o(p^2). \tag{6.22}$$

Покажем, что в этом случае мы также приходим к противоречию, но уже без привлечения (6.17). Из (6.19) имеем $\theta\bar{z} = \bar{z}' + p$, и тогда из (6.22) следует $(\bar{z}' + p)^+ \,\le\, o(p^2)$. Но в силу (6.21) $\bar{z}' = o(p)$, и так как $p \ge 0$, то отсюда вытекает (опять пишем индекс n), что $p_n = 0$ при достаточно больших n, и также $\bar{z}'_n = 0$. Но тогда в силу (6.19) $\bar{z}_n = 0$, т.е. $z_n = 1$, а в силу (6.21) $\eta(y'_n) = 0$, т.е. $u'_n(t) \equiv 0$, и следовательно, $u_n(t) \equiv 0$. Кроме того, из $p_n = 0$ следует $\theta_n = 1$, $u_{0,n}(t) \equiv 1$, а тогда и $x_n = \hat{x}$. Таким образом, при больших n траектория w_n совпадает с $\hat{w}$, что противоречит нашему предположению.

Лемма 6.2 доказана, а вместе с ней доказана и теорема 6.1.

7 Квадратичные условия в задаче (S_1) и системе (Ж)

Итак, мы перешли к $\gamma-$ достаточным условиям слабого минимума в задаче (S_1). Выпишем теперь эти условия.

Так как у нас $\hat{w}$ - особая, т.е. $\forall\, \lambda \in \Lambda(S_1, \hat{w})$ множитель при функционале $\alpha_0 = 0$, то функционал J не входит в функцию Лагранжа, и следовательно, в ее вторую вариацию.

Далее, поскольку ограничений неравенства в задаче (S_1) нет, то в записи конуса критических вариаций единственное неравенство, соответствующее функционалу J, можно игнорировать (так как неотрицательность ч„тной функции, у нас – однородной второй степени, на полупространстве эквивалентна ее неотрицательности на всем пространстве), поэтому функционал J вообще не войдет в формулировку $\gamma-$ условий.

Множество $\Lambda(\hat{w})$ здесь состоит из всех наборов $\lambda = (\psi = \psi_x,\, \psi_z = 0,\, \alpha_0 = 0,\, \beta_0 = \psi(0),\, \beta_T = -\psi(T)),$ для которых выполнены:

а) сопряженное уравнение

$$\dot{\psi} = -\psi\, r_0'(\hat{x}), \tag{7.1}$$

б) равенства

$$\psi(t)\, r_i(\hat{x}(t)) = 0 \qquad \forall\, i = 0, 1, \ldots, k-1, \tag{7.2}$$

в) условие нормировки

$$|\, \psi(0)\, | = 1. \tag{7.3}$$

Выбор конкретной нормировки здесь не существен, так как $\Lambda(\hat{w})$ есть конечномерный компакт. Так как весь набор здесь определяется функцией $\psi(t)$, то вместо множества $\Lambda(\hat{w})$ можно рассматривать множество $\Psi(\hat{w})$, состоящее из соответствующих функций $\psi(t)$. Поскольку траектория $\hat{w}$ особая, то, как уже отмечалось, $\Psi(\hat{w}) = \Psi_0(\hat{w})$.

Конус (здесь подпространство) критических вариаций $\mathcal{K}$ задается равенствами:

$$\dot{\bar{x}} = \bar{z} r_0(\hat{x}) + r_0'(\hat{x})\bar{x} + \sum_{i=1}^{k-1} \bar{u}_i r_i(\hat{x}), \tag{7.4}$$

$$\dot{\bar{z}} = 0, \qquad \bar{x}(0) = \bar{x}(T) = 0. \tag{7.5}$$

Переходя к переменным Гоха, т.е. полагая

$$\dot{\bar{y}}_i = \bar{u}_i, \qquad \bar{y}_i(0) = 0, \qquad i = 1, \ldots, k-1, \tag{7.6}$$

$$\bar{x} = \bar{\xi} + \sum_{j=1}^{k-1} \bar{y}_j\, r_j(\bar{x}), \tag{7.7}$$

получаем, что $\mathcal{K}$ задается уравнениями (7.6) и

$$\dot{\bar{\xi}} = \bar{z} r_0 + r_0' \bar{\xi} + \sum_{j=1}^{k-1} \bar{y}_j [r_0, r_j], \qquad \bar{\xi}(0) = 0, \tag{7.8}$$

$$\bar{\xi}(T) + \sum \bar{y}_j(T) r_j(\hat{x}(T)) = 0. \tag{7.9}$$

(Здесь $[f(x), g(x)] = f'(x)g(x) - g'(x)f(x)$ есть скобка Ли двух векторных полей.)

Для каждой ψ определяется функция Лагранжа

$$\Phi[\psi](w) = \psi_0(x_0 - a) - \psi_T(x_T - b) + \int_0^T \psi\left(\dot{x} - zr_0(x) - \sum u_i r_i(x)\right) dt, \qquad (7.10)$$

а рассматривается ее вторая вариация на траектории $\hat{w}$, которая может быть приведена к виду (см. Приложение C):

$$\Omega\,[\psi](\bar{z}, \bar{\xi}, \bar{y}, \bar{u}) \;=\; \frac{1}{2} \left.\left\{ \sum_{i,j=1}^{k-1} \bar{y}_i\, \bar{y}_j\, \psi\,(r_i'(\hat{x})\, r_j(\hat{x})) \right\}\right|_T +$$

$$+ \int_0^T \left(-\frac{1}{2}\, \psi\,(r_0''\, \bar{\xi}, \bar{\xi}) \;-\; \bar{z}\, \psi\,(r_0'\, \bar{\xi}) \;+\; \sum_{i=1}^{k-1} \bar{y}_i\, \psi\,[r_i, r_0]'\, \bar{\xi} + \right. \qquad (7.11)$$

$$\left. + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{k-1} \bar{y}_i\, \bar{y}_j\, \psi\,[\,[r_i, r_0], r_j\,] \;+\; \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{k-1} \bar{y}_i\, \bar{u}_j\, \psi\,[r_i, r_j] \right) dt.$$

Обратим внимание, что в последнем члене здесь матрица коэффициентов кососимметрична. Эти формулы уже приводились в [10, 17, 19].

Для произвольного множества $M = \{\psi\}$ введем функционал

$$\Omega\,[M](\bar{w}) \;=\; \sup_{\psi \in M}\, \Omega\,[\psi](\bar{w}).$$

Согласно общей теории [18], из множества Ψ мы должны выделить подмножества $G_a(\Psi)$, состоящие из тех $\psi \in \Psi$, для которых квадратичная форма (7.11) удовлетворяет условиям Гоха. Для этого определим соответствующие коэффициенты квадратичной формы.

Напомним, что квадратичная форма общего вида с нулевым лежандровым членом имеет следующий вид в переменных Гоха:

$$\Omega[\lambda](\bar{\xi}, \bar{y}, \bar{u}) = \; g[\lambda](\bar{\xi}_0, \bar{\xi}_T, \bar{y}_T) + \qquad (7.12)$$

$$+ \int_0^T \Big((D[\lambda]\bar{\xi}, \bar{\xi}) + (P[\lambda]\bar{\xi}, \bar{y}) + (Q[\lambda]\bar{y}, \bar{y}) + (V[\lambda]\bar{y}, \bar{u}) \Big)\, dt,$$

$$\dot{\bar{\xi}} = A(t)\bar{\xi} + B_1(t)\bar{y}, \qquad \dot{\bar{y}} = \bar{u}, \quad \bar{y}(0) = 0, \qquad (7.13)$$

где $g[\lambda]$ - квадратичная форма от концевых значений, все участвующие здесь матрицы измеримы и ограничены, из них $V[\lambda](t)$ и $B_1(t)$ липшицевы, причем $V[\lambda](t)$ кососимметрична, а $Q[\lambda](t)$ симметрична (см. [7, 18]).

Для произвольного множества $M = \{\lambda\}$ и числа $a \in \mathbb{R}$ множество $G_a(M)$ по определению состоит из всех $\lambda \in M$, для которых

$$1)\; V[\lambda](t) \equiv 0, \qquad 2)\; Q[\lambda](t) \geq a \quad \text{почти всюду}. \qquad (7.14)$$

(Неравенство $Q \ge a$ для симметричной $m \times m-$ матрицы Q означает, что $\forall\, h \in \mathbb{R}^m \quad (Qh, h) \ge a(h, h).$)

Вернемся теперь к квадратичной форме (7.11). Переменная $\bar z$ играет здесь роль еще одной, дополнительной компоненты $\bar\xi_0$, а последние два члена в (7.12) имеют вид:

$$(V[\lambda](t)\,\bar y, \bar u) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{k-1} \bar y_i\, \bar u_j\, \psi\,[r_i, r_j]\,(\hat x(t))\,, \tag{7.15}$$

$$(Q[\lambda](t)\,\bar y, \bar y) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{k-1} \bar y_i\, \bar y_j\, \psi\,[\,[r_i, r_0], r_j\,]\,(\hat x(t))\,. \tag{7.16}$$

Поэтому множество $G_a(\Psi)$ состоит из всех $\psi \in \Psi$, для которых на отрезке $[0,T]$ выполнены условия:

$$\psi(t)\,[r_i, r_j](\hat x(t)) \;=\; 0 \qquad \forall\, i, j = 1, \ldots, k-1, \tag{7.17}$$

$$\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{k-1} \bar y_i\, \bar y_j\, \psi[\,[r_i, r_0], r_j\,]\,(\hat x(t)) \;\ge\; a\,|\,\bar y\,|^2 \tag{7.18}$$

$$\forall\, \bar y = (\bar y_1, \ldots, \bar y_{k-1}) \in \mathbb{R}^{k-1}.$$

Отметим, что в силу (7.17) последний член в (7.11) пропадает, и тогда управление $\bar u$ не входит явным образом в Ω. При этом $\bar y(t)$ можно принять за новое управление, и (7.18) есть не что иное, как классическое условие Лежандра относительно этого нового управления. Во внеинтегральном члене в (7.11) вектор $\bar y(T)$ можно заменить на произвольный вектор $h \in \mathbb{R}^{k-1}$, см. [7, 9, 18], но здесь мы не будем этим пользоваться.

Теперь выпишем квадратичный порядок γ. Согласно общей теории [7, 9, 18], априорно мы должны взять

$$\gamma(\bar w) = \; |\bar z|^2 + |\bar x(0)|^2 + |\bar y(T)|^2 + \int_0^T |\bar y|^2\, dt.$$

Но поскольку нам надо будет рассматривать не произвольные $\bar w$, а лишь $\bar w \in \mathcal{K}$, а на этом подпространстве $\bar x(0) = 0$ и, как показано в [18, §6.2], имеется оценка

$$|\bar z| + |\bar y(T)| \le \text{const}\; ||\bar y||_1\,,$$

то в γ можно оставить лишь интегральный член, т.е.

$$\gamma(\bar w) \simeq \gamma'(\bar w) = \int_0^T |\bar y|^2\, dt. \tag{7.19}$$

Итак, мы определили множество $\Psi = \Psi(\hat w)$ (в данном случае оно совпадает с $\Psi_0(\hat w)$), его подмножества $G_a(\Psi)$, семейство квадратичных форм $\Omega[\psi](\bar w)$ и функционал сравнения $\gamma' \simeq \gamma$. Квадратичное $\gamma-$ достаточное условие слабого минимума для точки $\hat{w}$ в задаче (S_1) состоит в том, что при некотором $a > 0$

$$\Omega[\Psi](\bar{w}) \geq a \int_0^T |\bar{y}|^2 \, dt \qquad \forall \, \bar{w} \in \mathcal{K}. \tag{7.20}$$

Согласно [6, 7, 9], это условие эквивалентно тому, что при том же $a > 0$

$$\Omega \, [G_a(\Psi)](\bar{w}) \;\geq\; a \int_0^T |\bar{y}|^2 \, dt \qquad \forall \, \bar{w} \in \mathcal{K}. \tag{7.21}$$

(Последнее неравенство автоматически подразумевает, что $G_a(\Psi)$ непусто, иначе по определению $\Omega = -\infty$ как sup по $\emptyset$.)

Отсюда с учетом теорем 6.1, 5.2, 5.1 получаем окончательный вид квадратичных достаточных условий сильного минимума для особой траектории $\hat{w}$ в задаче (Z):

Теорема 7.1. Пусть $\hat{w} = (\hat{z} = 1, \hat{x}(t), \hat{u} = (1, 0, \ldots, 0))$ есть особая траектория задачи (Z), и для не„ при некотором $a > 0$ выполнено неравенство (7.20) или (7.21). Тогда $\hat{w}$ есть точка строгого сильного минимума в задаче $(\tilde{Z})$, и следовательно, точка строгого сильного минимума в задаче (Z).

Напомним, что в силу следствий 1, 2 из леммы 3.1 траектория $\hat{w}$ является особой в задаче (Z) тогда и только тогда, когда она особая в задаче (Z_*) (с ограничением $u_0 \leq 1$.) Множество $\Lambda(\hat{w})$ для этих задач одно и то же. В этом смысле задачи (Z) для всех субметрик $\varphi(x, u)$, имеющих одну и ту же опорную гиперплоскость в окрестности $\hat{x}(t)$, одинаковы. Можно ввести следующее

Определение 7.1. Будем говорить, что субметрики q_1 и q_2, удовлетворяющие предположению A2, *эквивалентны* в окрестности кривой $\hat{x}(t)$, если в некоторой окрестности множества $\hat{\chi}$ вектор $r_0(x)$ и подпространство $\Gamma_0(x)$, участвующие в определении опорной гиперплоскости, у них общие.

Другими словами, субметрики q_1 и q_2 эквивалентны в окрестности кривой $\hat{x}(t)$, если в некоторой окрестности множества $\hat{\chi}$ существует общий для них присоединенный опорный базис. Легко видеть, что выполнение этого свойства не зависит от параметризации кривой $\hat{x}$.

Для всех субметрик, эквивалентных данной, в присоединенном опорном базисе касательное полупространство к годографу в точке $r_0(x)$, для x из некоторой окрестности множества $\hat{\chi}$, задается неравенством $u_0 \leq 1$. Введем также следующее

Определение 7.2. Класс эквивалентности, т.е. множество всех субметрик, эквивалентных между собой в окрестности кривой $\hat{x}(t)$, будем называть *пучком субметрик,* эквивалентных в окрестности $\hat{x}(t)$.

Пучок субметрик, эквивалентных в окрестности $\hat{x}(t)$, полностью определяется заданием присоединенного базиса.

Определение 7.3. Множество всех субметрик из данного пучка, у которых подпространство $\Gamma_0(x)$ является строгой опорной гиперплоскостью, будем называть *строгим пучком субметрик,* эквивалентных в окрестности $\hat{x}(t)$.

В этих терминах получаем следующее усиление теоремы 7.1:

Теорема 7.2. Пусть $\hat{w} = (\hat{z} = 1, \hat{x}(t), \hat{u} = (1, 0, \ldots, 0))$ есть особая траектория задачи (Z_*), записанной в некотором присоединенном базисе, и пусть для нее при некотором $a > 0$ выполнено неравенство (7.20) или (7.21). Тогда $\hat{w}$ есть точка строгого сильного минимума в задаче (Z) с любой субметрикой из строго пучка, соответствующего этому базису, т.е. такой, для которой данный базис является присоединенным ($r_0(\hat{x}(t)) = \dot{\hat{x}}(t)$), и для всех x из некоторой окрестности $\hat{\chi}$ годограф $U(x)$ содержится в полупространстве $u_0 \le 1$, пересекаясь с подпространством $u_0 = 1$ по единственной точке $\hat{u}$.

Это и есть результат "прямого"применения общих квадратичных условий сильного минимума из [18] к задаче (Z). Недостатком этого результата является присутствующее в нем предположение об особости $\hat{w}$. Ниже, в §§ 8 – 10, мы покажем, что от этого предположения можно освободиться.

Обратим теперь внимание, что условия (7.20) и (7.21) в точности совпадают с полученными недавно А.А.Милютиным [17] квадратичными достаточными условиями т.н. жесткости траектории $\hat{w}$ для следующей

Системы (Ж):

$$\dot{x} = \; z\, r_0(x) + \sum_{i=1}^{k-1} u_i\, r_i(x),$$

$$\dot{z} = 0, \qquad x(0) = a, \quad x(T) = b.$$

Напомним, что гладкая $\Gamma-$ допустимая кривая $\hat{x}(t)$, соединяющая точки a и b, называется *жесткой* [11], если в некоторой е„ окрестности относительно нормы $||x||_C + ||\dot{x}||_\infty$ любая другая $\Gamma-$ допустимая кривая, соединяющая эти же точки, является перепараметризацией кривой $\hat{x}(t)$.

Это свойство эквивалентно тому [17], что в любом присоединенном базисе траектория $\hat{w} = (\hat{z} = 1, \hat{x}(t), \hat{u} = 0)$ является изолированной среди всех траекторий системы (Ж) на фиксированном отрезке $[0, T]$ относительно нормы $||w||_\infty = |z| + ||x||_C + ||u||_\infty$.

Определение 7.4. Следуя [17], траекторию $\hat{w} = (\hat{z} = 1, \hat{x}(t), \hat{u} = 0)$ системы (Ж) будем называть квадратично жесткой, если при некотором $a > 0$ выполнено неравенство (7.20) или (7.21), где $\Psi = \Psi_0 = \Psi_0(\hat{w})$ определяется, как и для задачи (S_1), равенствами (7.1) – (7.3).

В [17] доказано, что квадратично жесткая траектория является жесткой. (Этим и мотивировано последнее определение.) Там же показано, что *свойство квадратичной жесткости не зависит от выбора присоединенного базиса* (в частности, от этого выбора не зависит выполнение условий (7.17), (7.18)), так что можно говорить о квадратичной жесткости кривой $\hat{x}(t)$. (Г− допустимая кривая $\hat{x}(t)$ квадратично жесткая, если квадратично жесткой является соответствующая траектория $\hat{w} = (\hat{z} = 1, \hat{x}(t), \hat{u} = 0)$ системы (Ж) в некотором, и следовательно, любом присоединенном базисе.) Кроме того, показано, что это свойство не зависит от выбора параметризации кривой $\hat{x}$.

Пользуясь введенными терминами, получаем следующую переформулировку теоремы 7.2, связывающую понятия жесткости и сильной минимальности.

Теорема 7.3. Пусть особая траектория $\hat{w} = (\hat{z} = 1, \hat{x}(t), \hat{u} = (1, 0, \ldots, 0))$ задачи (Z_*), записанной в некотором присоединенном базисе, является квадратично жесткой. Тогда она есть точка строгого сильного минимума в задаче (Z) с любой субметрикой из строгого пучка, определяемого данным базисом.

Для доказательства этой теоремы мы проделали следующий путь:

$$\text{задача}\,(Z) \;\to\; \text{задача}\,(\tilde{Z}) \;\to\; \text{задача}\,(Z_*) \;\to$$
$$\to\; \text{задача}\,(S) \;\to\; \text{задача}\,(S_1) \;\to\; \text{система (Ж)}.$$

На этом мы закончим процедуру непосредственного применения общих квадратичных достаточных условий для особых траекторий к задаче о геодезических, и перейдем к освобождению от предположения об особости $\hat{w}$.

Часть II. Достаточные условия сильного минимума для произвольных квадратично жестких траекторий

8 Описание ситуации

В этой части статьи наша цель – освободиться от предположения об особости в теореме 7.3, т.е. доказать объявленную во введении Основную теорему 1. Сформулируем ее теперь в принятых выше обозначениях.

Теорема 8.1 (Основная теорема 1.) Пусть $\Gamma-$ допустимая кривая $\hat{x}(t)$, соединяющая точки a, b, является квадратично жесткой, т.е. в некотором присоединенном базисе для траектории $\hat{w} = (\hat{z} = 1, \hat{x}(t), \hat{u} = 0)$ системы (Ж) выполнено неравенство (7.20) или (7.21) при некотором $a > 0$. Тогда в любой субметрике, никак не связанной с этим базисом, имеющей строгую опорную гиперплоскость в окрестности $\hat{x}(t)$, кривая $\hat{x}(t)$ доставляет строгий сильный минимум расстояния между точками a, b, т.е. в задаче (Z), записанной в присоединенном базисе для $\hat{x}(t)$, строго опорном для данной субметрики, траектория $\hat{w} = (\hat{z} = 1, \hat{x}(t), \hat{u} = (1, 0, \ldots, 0))$ является точкой строгого сильного минимума.

Для доказательства мы попытаемся проделать тот же путь, что и в части I, но в обратном порядке: от системы (Ж) к задаче (Z). Однако на этом пути нас ожидает весьма серьезная неприятность: при переходе от системы (Ж) к задаче (S_1) могут появиться $\lambda \in \Lambda(S_1, \hat{w})$, для которых

$$\psi(t)\, r_0(\hat{x}(t)) = \frac{\alpha_0}{T} > 0, \tag{8.1}$$

а тогда при дальнейшем переходе к задаче (S) траектория $\hat{w}$ станет неособой, т.к. будет иметь λ с $\alpha_0 > 0$. (В самой задаче (S_1) особость еще сохранится, т.к. в ней управление $u = (u_1, \ldots, u_{k-1})$ свободно, поэтому любая стационарная траектория особая; но в задаче (S) добавляется управление $u_0 \leq 1$, и именно относительно него неравенство (8.1) нарушает особость: $H_{u_0} = \psi r_0(\hat{x}) > 0$, т.е. максимум H по $u_0 \leq 1$ достигается строго.) Раньше, в части I, этого не было, ибо мы как раз предполагали, что траектория $\hat{w}$ – особая в задаче (Z), а это эквивалентно ее особости в задаче (S).

Для неособых траекторий выполнение квадратичных достаточных условий с нашим γ – слишком слабое условие, чтобы в сколько-нибудь общей ситуации гарантировать наличие даже слабого минимума, не говоря уже о понтрягинском или сильном. Таким образом, при непосредственном переходе от системы (Ж) к задаче (S_1) мы сразу же выходим за рамки теории квадратичных условий для особых режимов, на которую мы опираемся, и имея лишь оценки (7.20), (7.21), ничего дальше не можем сказать.

Для преодоления этого препятствия мы воспользуемся одним приемом, предложенным А.А.Милютиным. Предварительно опишем более точно ситуацию.

Итак, пусть кривая $\hat{x}(t)$, $t \in [0, T]$ распределения $\Gamma(x)$ такова, что в некотором присоединенном базисе $r_0(x), \ldots, r_{k-1}(x)$ соответствующая ей траектория $\hat{w} = (\hat{z} = 1,\, \hat{x}(t),\, \hat{u}_i = 0,\, i = 1, \ldots, k-1)$ системы (Ж) удовлетворяет квадратичным достаточным условиям (7.20) или (7.21). Как уже говорилось, эти условия будут тогда выполнены и в любом другом присоединенном базисе.

Пусть теперь в $\Gamma(x)$ задана произвольная субметрика $q(x, \dot{x})$, никак не связанная с этим базисом, имеющая строгую опорную гиперплоскость $\Gamma_0(x)$ в окрестности кривой $\hat{x}(t)$. Заменив, если необходимо, параметризацию кривой $\hat{x}$, можно считать, что $q(\hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t)) = 1$. При этом соответственно изменится время T и базисное векторное поле $r_0(x)$, но не изменится факт выполнения условий (7.20), (7.21) с некоторым $a > 0$ для траектории $\hat{w}$ в новом присоединенном базисе. Заменив теперь векторные поля $r_1(x), \ldots, r_{k-1}(x)$ на базисные поля для гиперплоскости $\Gamma_0(x)$ (в некоторой окрестности множества $\hat{\chi}$), мы будем иметь присоединенный базис в $\Gamma(x)$, строго опорный для данной субметрики, в котором траектория $\hat{w}$ удовлетворяет системе (Ж), и согласно [17], по-прежнему удовлетворяет условиям (7.20), (7.21) с некоторым $a > 0$. (Именно благодаря этому факту в утверждении теоремы 8.1 фигурирует *произвольная* субметрика.)

Зафиксируем полученный базис, отрезок [0,T] и траекторию $\hat{w}$, и все дальнейшие рассмотрения будем проводить именно для этих объектов. В этом базисе, в некоторой окрестности $\hat{\chi}$, единичный шар данной субметрики $U(x)$ есть выпуклый компакт в пространстве $\mathbb{R}^k$, содержащийся в полупространстве $u_0 \le 1$ и пересекающийся с гиперплоскостью $u_0 = 1$ по единственной точке $\hat{u} = (1, 0, \ldots, 0)$.

Выберем теперь любой выпуклый компакт $\tilde{U} \subset \mathbb{R}^k$, содержащий $U(x)$ для всех x из некоторой окрестности множества $\hat{\chi}$, и также пересекающийся с подпространством $u_0 = 1$ по единственной точке $\hat{u} = (1, 0, \ldots, 0)$. (Такой компакт уже использовался в §4; его существование доказано в Приложении В.) Как и раньше, если мы покажем, что $\hat{w}$ есть точка строгого сильного минимума в задаче (Z) с множеством $\tilde{U}$, то она тем более будет таковой в задаче (Z) с множеством $U(x)$, и тем самым теорема 8.1 будет доказана.

Итак, наша начальная позиция такова: траектория $\hat{w}$ является квадратично жесткой в системе (Ж), а мы хотим доказать, что она является точкой строгого сильного минимума в задаче (Z) с множеством $\tilde{U}$.

По сути дела, если убрать ненужные теперь предварительные детали, мы имеем следующую ситуацию. В открытом множестве в $\mathbb{R}^n$ задан произвольный базис распределения $\Gamma(x)$, т.е. k линейно независимых векторных полей $r_0(x), \ldots, r_{k-1}(x)$. В этом базисе рассматривается система (Ж), и задана траектория $\hat{w} = (\hat{z} = 1, \hat{x}(t), \hat{u} = 0)$ этой системы на некотором отрезке [0,T], которая является квадратично жесткой, т.е. удовлетворяет неравенствам (7.20), (7.21) при некотором $a > 0$. Задан также произвольный выпуклый компакт $\tilde{U} \in \mathbb{R}^k$, содержащийся в полупространстве $u_0 \le 1$ и пересекающийся с гиперплоскостью $u_0 = 1$ по единственной точке $\hat{u} = (1, 0, \ldots, 0)$, для которого рассматривается задача (Z) на том же отрезке [0,T]. Требуется доказать, что тогда траектория $\hat{w} = (\hat{z} = 1,\, \hat{x}(t),\, \hat{u}_0 = 1,\, \hat{u}_1 = \ldots = \hat{u}_{k-1} = 0)$ доставляет строгий сильный минимум в этой задаче.

Приступим к доказательству. Как уже говорилось, если теперь к системе (Ж) мы добавим функционал $J = z(0) \to \min$, то в полученной задаче (S_1) могут появиться неособые ψ, т.е. такие, для которых выполнено (8.1), и этого обстоятельства нам хотелось бы избежать. Прием, предложенный А.А.Милютиным, состоит в том, чтобы сначала перейти от системы (Ж) к некоторой "ослабленной"системе $(')$, и уже от нее к соответствующим задачам (S) и (S_1) (точнее, к аналогам этих задач, которые мы будем обозначать другими буквами.)

Рассмотрим первый шаг этой цепочки переходов.

9 Переход к системе $(')$

Пусть, как и раньше, $\Psi_0 = \Psi_0(\hat{w})$ есть множество всех липшицевых $n-$ мерных функций на [0,T], удовлетворяющих равенствам

$$\dot{\psi}(t) = -\psi(t)\, r_0'(\hat{x}(t)), \tag{9.1}$$

$$\psi(t)\, r_i'(\hat{x}(t)) = 0 \qquad \forall\, i = 0, 1, \ldots, k-1. \tag{9.2}$$

Рассмотрим в $\mathbb{R}^n$ линейное подпространство $M = \{\psi(T)\,|\,\psi \in \Psi_0\}$ и выберем (и зафиксируем на дальнейшее) какое-либо прямое дополнение L к нему. Тогда $\mathbb{R}^n = M \oplus L$, и любой вектор $x \in \mathbb{R}^n$ представим в виде $x = x_M + x_L$, где $x_M = \pi_M x$, $x_L = \pi_L x$, а π_M, π_L – соответствующие проекции на M, L. Если считать M и L координатными плоскостями в $\mathbb{R}^n$, то можно писать $x = (x_M, x_L)$.

Отметим одно простое свойство, которое нам понадобится в дальнейшем.

Предложение 9.1. Если некоторая функция $\psi(t)$ удовлетворяет уравнению (9.1), и имеет $\psi(T) \in M$, то $\psi \in \Psi_0$ и для нее автоматически выполнены равенства (9.2).

Действительно, в этом случае $\psi(T) = \tilde{\psi}(T)$ для некоторой $\tilde{\psi} \in \Psi_0$ (по определению множества M), а так как обе функции ψ и $\tilde{\psi}$ удовлетворяют одному и тому же дифференциальному уравнению (9.1), то $\psi(t) = \tilde{\psi}(t)$ на всем отрезке [0,T], т.е. $\psi \in \Psi_0$, и следовательно, выполнено (9.2).

Обозначим $\Delta x(T) = x(T) - b$ и рассмотрим следующую

Систему $(')$:

$$\dot{x} = \; z\, r_0(x) + \sum_{i=1}^{k-1} u_i\, r_i(x),$$

$$\dot{z} = 0, \qquad x(0) = a,$$

$$\Delta x_M(T) = \; \pi_M\, (x(T) - b) = 0,$$

$$|\Delta x_L(T)|^2 \;\le\; 0.$$

От системы (Ж) она отличается тем, что вместо концевого равенства $x(T)-b=0$, т.е. двух равенств $\Delta x_M(T)=0$ и $\Delta x_L(T)=0$ теперь имеется одно равенство, а другое записано в виде неравенства $|\Delta x_L(T)|^2 \le 0$.

Ясно, что множество допустимых траекторий в обеих системах одно и то же; поэтому на первый взгляд мы ничего не изменили. Однако конус критических вариаций $\mathcal{K}(')$ для системы $(')$ на траектории $\hat{w}$ будет шире, чем этот конус для системы (Ж). В обоих случаях он является подпространством, но если раньше он задавался равенствами

$$\dot{\bar{x}} = \bar{z}\, r_0(\hat{x}) \;+\; r_0'(\hat{x})\,\bar{x} \;+\; \sum_{i=1}^{k-1} \bar{u}_i\, r_i(\hat{x}),$$

$$\dot{\bar{z}}=0, \qquad \bar{x}(0)=0, \qquad \bar{x}_M(T)=0, \qquad \bar{x}_L(T)=0,$$

то теперь последнее из этих равенств отсутствует: $\bar{x}_L(T)$ свободно. Кроме того, как мы покажем ниже, множество наборов Лагранжа $\Lambda(\hat{w})$ для системы $(')$ шире, чем для системы (Ж). (Множество $\Lambda(\hat{w})$ для любой системы определяется так же, как и для любой задачи на минимум, с той только разницей, что здесь нет целевого функционала и, следовательно, не будет соответствующего множителя α_0. Другими словами, множество $\Lambda(\hat{w})$ для любой системы есть множество всех тех наборов Лагранжа для задачи на минимум с данной системой и произвольным функционалом, у которых коэффициент при функционале $\alpha_0=0$. Фактически мы уже пользовались этим понятием в §7.)

Каждому $\lambda \in \Lambda(',\hat{w})$ соответствует функция Лагранжа и ее вторая вариация $\Omega[\lambda](\bar{w})$.

Определение 9.1. Будем говорить, что для траектории $\hat{w}$ системы $(')$ выполнена слабая $\gamma-$ достаточность, если при некотором $a>0$

$$\max_{\Lambda(',\hat{w})} \Omega[\lambda](\bar{w}) \ge a\gamma(\bar{w}) \qquad \forall\, \bar{w} \in \mathcal{K}('). \tag{9.3}$$

Для системы (Ж) слабая $\gamma-$ достаточность была названа квадратичной жесткостью (см. §7).

Теорема 9.1. *Пусть для траектории $\hat{w}$ в системе (Ж) выполнена слабая $\gamma-$ достаточность (т.е. квадратичная жесткость). Тогда она выполнена и в системе $(')$.*

Прежде, чем давать доказательство, уточним структуру множества $\Lambda(')$. Прежнее множество $\Lambda()$ состояло из нормированных наборов $\lambda=(\psi=\psi_x(t),\psi_z,\beta_0,\beta_M,\beta_L)$ таких, что для соответствующих функций

$$H[\lambda](z,x,u) \;=\; z(\psi, r_0(x)) \;+\; \textstyle\sum u_i(\psi, r_i(x)),$$

$$l[\lambda](x(0),x_M(T),x_L(T)) \;=\; \beta_0\,(x(0)-a) \;+\; \beta_M \Delta x_M(T) \;+\; \beta_L \Delta x_L(T)$$

выполнены равенства:

$$\dot\psi_x = -H_x[\lambda] = \ -\hat z\,\psi_x r_0'(\hat x),$$

$$\dot\psi_z = -H_z[\lambda] = \ -\psi_x r_0(\hat x),$$

$$\psi_x(0) = l'_{x(0)}[\lambda] = \beta_0, \qquad \psi_x(T) = -l'_{x(T)}[\lambda] = -(\beta_M, \beta_L),$$

$$\psi_z(0) = \ \psi_z(T) = \ 0,$$

$$H_{u_i}[\lambda] = \ (\psi, r_i(\hat x)) = 0, \qquad i = 1, \ldots, k-1,$$

$$H[\lambda](\hat z, \hat x, \hat u) = \ \hat z\,(\psi, r_0(\hat x)) = \mathrm{const}\,.$$

Эти условия, как уже было показано в §3, сводятся к тому, что функция $\psi(t) = \psi_x(t)$ удовлетворяет равенствам (9.1), (9.2). При этом условия трансверсальности несущественны, а нетривиальность набора λ эквивалентна нетривиальности функции ψ (функция $\psi_z \equiv 0$). Обратим внимание, что здесь $\forall\,\lambda$ имеем $\beta_L = 0$, ибо $\psi(T) \in M$ по определению подпространства M.

Для новой системы множество $\Lambda(')$ состоит из наборов $\lambda = (\psi = \psi_x(t), \psi_z, \beta_0, \beta_M, \alpha_L)$, где α_L уже скаляр, $\alpha_L \ge 0$, удовлетворяющих тем же условиям, в которых меняется лишь концевая функция $l[\lambda]$, равная теперь

$$l[\lambda](x(0), x_M(T), x_L(T)) = \ \beta_0\,(x(0) - a) + \beta_M \Delta x_M(T) + \alpha_L |\Delta x_L(T)|^2,$$

поэтому условия трансверсальности теперь будут:

$$\psi(0) = \beta_0, \qquad \psi(T) = (-\beta_M, 0). \tag{9.4}$$

Последнее равенство означает просто, что $\psi(T) \in M$. По-прежнему здесь $\psi = \psi_x$ удовлетворяет (9.1), (9.2), а $\psi_z \equiv 0$ (поэтому далее ψ_z не рассматриваем).

Таким образом, если $\lambda \in \Lambda(')$, то ψ удовлетворяет равенствам (9.1), (9.2), и $\psi(T) \in M$, т.е. новых ψ по сравнению с $\Lambda()$ не появляется.

С другой стороны, если $\lambda = (\psi, \beta_0, \beta_M, \beta_L) \in \Lambda()$, то ψ удовлетворяет равенствам (9.1), (9.2), и $\psi(T) \in M$. Но тогда ψ удовлетворяет (9.4), и значит, при любом $\alpha \ge 0$ набор $\lambda = (\psi, \beta_0, \beta_M, \alpha) \in \Lambda(')$.

Итак, запас функций $\psi = \psi_x$ в множествах $\Lambda()$ и $\Lambda(')$ один и тот же. Однако в множестве $\Lambda(')$ появляется еще один элемент:

$$\lambda_0 \ = \ (\psi(t) \equiv 0,\ \beta_0 = 0,\ \beta_M = 0,\ \alpha_L = 1),$$

и, как нетрудно показать, любой элемент $\Lambda(')$ есть выпуклая комбинация некоторого элемента, имеющего $\psi \ne 0$ и $\alpha_L = 0$, и этого "отмеченного" элемента λ_0. Из приведенных рассуждений вытекает следующее нужное нам утверждение (фактически мы его доказали):

Лемма 9.1. Имеется иньекция $\pi: \Lambda() \to \Lambda(')$, при которой функция Лагранжа $\Phi[\lambda](z,x,u)$ не меняется, и $\Lambda(')$ с точностью до нормировки есть выпуклая оболочка $\pi(\Lambda())$ и точки λ_0.

Действительно, рассмотрим в качестве π отображение

$$\lambda = (\psi, \beta_0, \beta_M, \beta_L = 0) \longmapsto \lambda' = (\psi, \beta_0, \beta_M, \alpha_L = 0).$$

Ясно, что оно удовлетворяет требуемым свойствам. Функция Лагранжа для таких λ и λ' в обеих системах одна и та же. Точнее, $\Phi[\lambda,] = \Phi[\lambda','].$ Тогда и вторые вариации этих функций (в точке $\hat{w}$) связаны точно так же: $\Omega[\lambda,](\bar{w}) = \Omega[\lambda','](\bar{w})$.

Доказательство теоремы 9.1. Из леммы 9.1 вытекает, что левая часть в (9.3) есть максимум из двух величин: $\Omega[\Lambda()](\bar{w})$ и $\Omega[\lambda_0](\bar{w})$. Для точки λ_0 имеем $\Phi[\lambda_0](w) = |\Delta x_L(T)|^2$, следовательно, $\Omega[\lambda_0](\bar{w}) = |\bar{x}_L(T)|^2$. Таким образом, утверждение теоремы сводится к следующему. Пусть при некотором $a > 0$

$$\Omega[\Lambda()](\bar{w}) \geq a\gamma(\bar{w}) \qquad \forall\, \bar{w} \in \mathcal{K}(). \tag{9.5}$$

Тогда при некотором $a' > 0$

$$\max\{\, \Omega[\Lambda()](\bar{w}),\, |\bar{x}_L(T)|^2 \,\} \;\geq\; a'\gamma(\bar{w}) \qquad \forall\, \bar{w} \in \mathcal{K}('). \tag{9.6}$$

Докажем это утверждение от противного. Допустим, что (9.6) не выполнено, т.е. существует последовательность $\bar{w}_n \in \mathcal{K}(')$, для которой одновременно

$$\Omega[\Lambda()](\bar{w}_n) \;\leq\; o\,(\gamma(\bar{w}_n)), \tag{9.7}$$

$$|\bar{x}_{L,n}(T)|^2 \;\leq\; o\,(\gamma(\bar{w}_n)).$$

Обозначим для краткости $\gamma(\bar{w}_n) = \gamma_n$. Последнее неравенство означает, что вариация $\bar{w}_n$ нарушает ограничение $\bar{x}_L(T) = 0$ из числа задающих подпространство $\mathcal{K}()$ (и только это ограничение, ибо $\bar{w}_n \in \mathcal{K}(')$), на величину порядка $o\,(\sqrt{\gamma_n})$. Тогда из теоремы Банаха об открытом отображении (расстояние от точки до ядра линейного сюрьективного оператора оценивается через норму образа этой точки) вытекает, что существует поправка $\tilde{w}_n \in \mathcal{K}(')$ такая, что

$$||\tilde{w}_n|| = \; |\tilde{z}_n| + ||\tilde{x}_n||_C + ||\tilde{u}_n||_\infty \leq o\,(\sqrt{\gamma_n}) \tag{9.8}$$

$$\text{и} \qquad\qquad w'_n = \bar{w}_n + \tilde{w}_n \in \mathcal{K}(), \tag{9.9}$$

т.е. $x'_n(T) = \bar{x}_n(T) + \tilde{x}_n(T) = 0$. Легко видеть, что для новой последовательности $\gamma(w'_n) = \gamma(\bar{w}_n + \tilde{w}_n) = \gamma_n + o(\gamma_n)$, т.е. новая бесконечно малая величина $\gamma'_n = \gamma(w'_n)$ эквивалентна старой γ_n.

Оценим теперь значение $\Omega[\Lambda()]$ на последовательности w'_n, учитывая (9.7). Для этого оценим сначала изменение отдельной квадратичной формы для каждого λ. Это удобно сделать для квадратичной формы общего вида, имеющей нулевой лежандровый член (черту над переменными для удобства здесь не пишем):

$$\Omega(x,u) = (Sp,p) + \int_0^T \big((D(t)x,x) + 2(x,C(t)u)\big)\, dt,$$

и рассматриваемой на линейном уравнении

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \tag{9.10}$$

где $p = (x_0, x_T)$, матрица S имеет размер $2n \times 2n$, матрицы D, A соответствующих размерностей измеримы и ограничены, а матрицы B, C липшицевы. (Квадратичные формы нашего семейства $\Omega[\lambda]$ входят, очевидно, в этот общий класс. Надо лишь отметить, что у нас фазовой переменной является не x, а пара (z,x).) Для системы (9.10) по определению

$$\gamma(w) = \ |x(0)|^2 + |y(T)|^2 + \int_0^T |y|^2\, dt, \qquad \text{где} \quad \dot{y} = u, \qquad y(0) = 0,$$

и можно показать (см. Приложение D), что справедлива оценка

$$|x(0)|^2 + |x(T)|^2 + \int_0^T |x|^2\, dt \ \le\ \text{const} \cdot \gamma(w) \tag{9.11}$$

Лемма 9.2. Пусть последовательности $w_n = (x_n, u_n)$ и $\tilde{w}_n = (\tilde{x}_n, \tilde{u}_n)$ удовлетворяют линейной системе (9.10), причем

$$||\tilde{w}_n||_\infty = \ ||\tilde{x}_n||_\infty + ||\tilde{u}_n||_\infty \ \le\ o\,(\sqrt{\gamma_n}), \tag{9.12}$$

где $\gamma_n = \gamma(w_n)$. Тогда для $w'_n = w_n + \tilde{w}_n$ будет $\gamma(w'_n) \sim \gamma_n$, и

$$\Omega(w'_n) = \ \Omega(w_n) \ +\ o\,(\gamma_n).$$

Доказательство мы также отнесли в Приложение D.

В нашей ситуации из этой леммы вытекает, что $\forall\, \lambda$

$$\Omega[\lambda](w'_n) \ =\ \Omega[\lambda](\bar{w}_n) \ +\ a_n[\lambda] \cdot \gamma_n,$$

где $a_n[\lambda] \to 0$. Так как зависимость от λ здесь линейная, то для любого ограниченного множества $M = \{\lambda\}$ будет выполнено

$$\sup_{\lambda\in M} \Omega[\lambda](w'_n) = \ \sup_{\lambda\in M} \Omega[\lambda](\bar{w}_n) \ +\ b_n\, \gamma_n,$$

где $b_n = b_n(M) \to 0$. В частности, для $M = \Lambda()$ будем иметь

$$\Omega[\Lambda()](w_n') \; = \; \Omega[\Lambda()](\bar{w}_n) \; + \; o\,(\gamma_n).$$

Но тогда из (9.7) получаем $\Omega[\Lambda()](w_n') \le o\,(\gamma_n)$, что с учетом (9.9) противоречит (9.5). Теорема 9.1 доказана.

Итак, мы теперь находимся в системе $(')$, и в ней для траектории $\hat{w}$ выполнена слабая $\gamma-$ достаточность.

10 Переход к задачам (P_1), (P) и (Y_*)

Рассмотрим теперь задачу (P_1), получающуюся при добавлении к системе $(')$ функционала $J = z(0) \to \min$, и посмотрим, каково здесь будет множество $\Lambda(P_1, \hat{w})$. Оно состоит из всех нормированных наборов $\lambda = (\psi = \psi_x(t), \psi_z,\, \beta_0, \beta_M,$ $\alpha_0, \alpha_L)$, где $\alpha_0 \ge 0$, $\alpha_L \ge 0$, таких, что для соответствующих функций

$$H[\lambda](z,x,u) = \; z(\psi, r_0(x)) + \sum u_i(\psi, r_i(x)) + \psi_z \cdot 0,$$

$$l[\lambda](z_0, x_0, x_T) = \; \alpha_0 z(0) + \beta_0(x(0) - a) + \beta_M \Delta x_M(T) + \alpha_L |\Delta x_L(T)|^2$$

выполнены условия (учитываем, что $\hat{z} = 1$):

$$H[\lambda](\hat{z}, \hat{x}, \hat{u}) = \psi\, r_0(\hat{x}) = \text{const}\,,$$

$$\dot{\psi}_z = -\psi\, r_0(\hat{x}), \qquad \psi_z(0) = \alpha_0, \quad \psi_z(T) = 0$$

(отсюда $\psi r_0(\hat{x}) = \alpha_0/T \ge 0$),

$$\dot{\psi} = -\psi\, r_0'(\hat{x}), \qquad \psi(0) = \beta_0, \quad \psi(T) = (-\beta_M, 0),$$

и по-прежнему $\psi\, r_i(\hat{x}) = 0, \quad i = 1, \ldots, k-1.$

Здесь a'priori возможно $\alpha_0/T = \psi r_0(\hat{x}) > 0$, т.е. возможно появление "неособого" $\psi = \psi_x$. Однако из условия трансверсальности $\psi(T) = (-\beta_M, 0)$, т.е. $\psi(T) \in M$ и предложения 9.1 вытекает, что $\psi r_0(\hat{x})) = 0$, т.е. $\alpha_0 = 0$ (и при этом также $\psi_z = 0$).

Таким образом, при переходе от системы $(')$ к задаче (P_1) новых $\psi = \psi_x$ не появляется, и следовательно, множества Лагранжа для них совпадают: $\Lambda(P_1, \hat{w}) = \Lambda(', \hat{w})$. (Точнее, множество $\Lambda(P_1, \hat{w})$ состоит из всех элементов вида $(\alpha_0 = 0,\, \lambda)$, где $\lambda \in \Lambda(', \hat{w})$, и только из таких элементов.)

Далее, конус критических вариаций в задаче (P_1) есть полупространство в подпространстве $\mathcal{K}(')$, а именно,

$$\mathcal{K}(P_1) = \; \{\bar{w} \in \mathcal{K}(') \mid \bar{z}(0) \le 0\,\}.$$

(Дополнительное неравенство соответствует функционалу J задачи (P_1), которого в системе $(')$ не было.) Но с точки зрения неотрицательности любой однородной второй степени функции линейное пространство и его полупространство эквивалентны, поэтому можно считать $\mathcal{K}(P_1) = \mathcal{K}(')$.

Из этих двух фактов вытекает

Теорема 10.1. Пусть в системе $(')$ для траектории $\hat{w}$ выполнена слабая $\gamma-$ достаточность. Тогда она выполнена и в задаче (P_1), т.е. при некотором $a > 0$

$$\max_{\Lambda(P_1)} \Omega[\lambda](\bar{w}) \geq a\gamma(\bar{w}) \qquad \forall\, \bar{w} \in \mathcal{K}(P_1). \tag{10.1}$$

Таким образом, мы теперь находимся в задаче (P_1), и для $\hat{w}$ выполнена слабая $\gamma-$ достаточность (10.1). Заметим, что задача (P_1) почти совпадает с задачей (S_1) – отличие лишь в том, что вместо ограничения $\Delta x(T) = x(T) - b = 0$ теперь имеется два ограничения: $\Delta x_M(T) = 0, \quad |\Delta x_L(T)|^2 \leq 0.$

Пойдем дальше. Ранее к задаче (S_1) мы переходили от задачи (S). Теперь же сделаем соответствующий обратный переход — от задачи (P_1) к следующей

Задаче (P):

$$\dot{x} = zu_0 r_0(x) + \sum_{i=1}^{k-1} u_i r_i(x), \tag{10.2}$$

$$\dot{z} = 0, \qquad u_0 \leq 1,$$

$$x(0) = a, \quad \Delta x_M(T) = 0, \quad |\Delta x_L(T)|^2 \leq 0.$$

$$J = z(0) \to \min,$$

т.е. мы теперь "отпустили" u_0. (Было $u_0 = 1$, а стало $u_0 \leq 1$.)

Так как множество допустимых управлений расширилось, то соответствующее множество Лагранжа Λ может только сузиться. Однако в данном случае никакого сужения не будет.

Лемма 10.1. Задачи (P) и (P_1) имеют одно и то же множество $\Lambda(\hat{w})$.

Доказательство. Введение $u_0 \leq 1$ приводит к тому, что в ПМ появляется условие

$$H_{u_0}[\lambda] = \psi\, r_0(\hat{x}) \geq 0. \tag{10.3}$$

Но для любого $\lambda \in \Lambda(P_1)$ выполнено просто $\psi r_0(\hat{x}) = 0$, поэтому $\lambda \in \Lambda(P)$. Обратное включение $\Lambda(P) \subset \Lambda(P_1)$, как уже было сказано, очевидно.

Замечание. Эта лемма была бы верна и для обычного граничного условия $x(T) = 0$, т.е. при переходе от задачи (S_1) к задаче (S), ибо $\forall\, \lambda \in \Lambda(S_1)$ выполняется $\psi\, r_0(\hat{x}) = \alpha_0/T \geq 0$, а это и есть дополнительное условие (10.3) в ПМ для задачи (S).

Для нас же теперь важно, что в задаче (P_1) $\psi\, r_0(\hat{x}) = 0$, откуда по лемме 10.1 следует, что в задаче (P) траектория $\hat{w}$ особая.

Теорема 10.2. Слабая $\gamma-$ достаточность для траектории $\hat{w}$ в задаче (P_1) эквивалентна слабой $\gamma-$ достаточности для этой траектории в задаче (P).

Доказательство полностью повторяет доказательство теоремы 6.1 с той лишь разницей, что в функции нарушения вместо $|x(T) - b|$ теперь надо везде брать $|\Delta x_M(T)| + |\Delta x_L(T)|^2$. Поскольку член $|x(T) - b|$ фактически принимал лишь "пассивное"участие во всех рассуждениях, то при такой замене ничего не изменится. Подробную проверку мы оставляем заинтересованному читателю.

Перейдем теперь от задачи (P) к задаче (Y_*), которая получается из задачи (P) заменой дифференциального уравнения (10.2) на "исходное"уравнение (5.1).

Задача (Y_*) **:**

$$\dot{x} \;=\; z\left(u_0 r_0(x) \,+\, \sum_{i=1}^{k-1} u_i r_i(x)\right),$$

$$\dot{z} = 0, \qquad u_0 \le 1,$$

$$x(0) = a, \quad \Delta x_M(T) = 0, \quad |\Delta x_L(T)|^2 \le 0,$$

$$J = z(0) \to \min .$$

Теорема 10.3. Слабая $\gamma-$ достаточность для траектории $\hat{w}$ в задаче (P) эквивалентна слабой $\gamma-$ достаточности для этой траектории в задаче (Y_*) .

Доказательство совершенно аналогично доказательству теоремы 5.2.

И наконец, пользуясь теоремой 8.1 из [18], мы можем перейти к конечному пункту нашей цепочки переходов –

Задаче $(\tilde{Y})$:

$$\dot{x} \;=\; z\left(u_0 r_0(x) \,+\, \sum_{i=1}^{k-1} u_i r_i(x)\right), \tag{10.4}$$

$$\dot{z} = 0, \qquad u \in \tilde{U}, \qquad x(0) = a, \tag{10.5}$$

$$\Delta x_M(T) = 0, \qquad |\Delta x_L(T)|^2 \le 0, \tag{10.6}$$

$$J = z(0) \to \min,$$

которая отличается от задачи (Y_*) тем, что допустимое множество управлений здесь не полупространство $u_0 \le 1$, а выпуклый компакт $\tilde{U}$, описанный в конце §8. А именно, по аналогии с теоремой 5.1 имеет место

Теорема 10.4. Пусть для траектории $\hat{w}$ в задаче (Y_*) выполнено $\gamma-$ достаточное условие слабого минимума. Тогда $\hat{w}$ есть точка строгого сильного минимума в задаче $(\tilde{Y})$ с множеством $\tilde{U}$. Более того, при некоторых $\varepsilon, C > 0$ на множестве $|z-1| + ||x-\hat{x}||_C < \varepsilon$ для любых $w = (z, x, u)$, удовлетворяющих (10.4) и (10.5), выполняется оценка

$$(z-1)^+ \; + |\Delta x_M(T)| + |\Delta x_L(T)|^2 \;\geq\; C\,\gamma(w-\hat{w}). \tag{10.7}$$

Теперь остается заметить, что если пренебречь $\gamma-$ оценкой (10.7), т.е. отбросить второе утверждение теоремы 10.4, то строгий сильный минимум (в точке $\hat{w}$) в задаче $(\tilde{Y})$ совпадает со строгим сильным минимумом в задаче $(\tilde{Z})$, которая (см. §4) отличается от задачи $(\tilde{Y})$ лишь тем, что граничные условия в ней имеют исходный вид $\Delta x(T) = x(T) - b = 0$, ибо вне $\gamma-$ оценок ограничения (10.6) имеют тот же смысл, что и $\Delta x(T) = 0$.

Итак, мы проделали путь от системы (Ж) к задаче $(\tilde{Z})$:

$$\text{система (Ж)} \to \text{система}\,(') \to \text{задача}\,(P_1) \to \text{задача}\,(P) \to$$

$$\to \text{задача}\,(Y_*) \to \text{задача}\,(\tilde{Y}) \to \text{задача}\,(\tilde{Z}),$$

но на этот раз без предположения об особости траектории $\hat{w}$ в задаче $(\tilde{Z})$.
Из теорем 9.1, 10.1 – 10.4 вытекает

Теорема 10.5. Пусть для траектории $\hat{w}$ в системе (Ж) выполнена слабая $\gamma-$ достаточность, т.е. траектория $\hat{w}$ квадратично жесткая. Тогда в задаче $(\tilde{Z})$ на траектории $\hat{w}$ имеется строгий сильный минимум.

Таким образом, теорема 8.1 – Основная теорема 1 данной статьи – доказана.

Эта теорема сильнее теоремы 5.2 из [16], так как в последней: а) допускались только двумерные распределения и только субримановы метрики; б) предполагалось, что неравенство (7.21) выполнено для отдельной квадратичной формы $\Omega[\psi](\bar{w})$ при некотором $\psi \in G_a(\Psi_0)$, что является более жестким требованием; в) гарантировался не сильный минимум, а лишь минимум относительно $||w||_1$.

Часть III. Достаточные условия понтрягинского минимума

Рассмотрим опять исходную задачу (Z) о кривой наименьшей длины, но будем теперь изучать вопрос о наличии не сильного, а лишь понтрягинского минимума (сокращенно, $\Pi-$ минимума) на данной траектории $\hat{w}$. Здесь нам будет достаточно требовать от субметрики выполнения предположения A2 о существовании дважды гладкой опорной (не обязательно строгой опорной) гиперплоскости в окрестности траектории $\hat{x}(t)$.

11 Переход к задачам (Z_*) и (S)

Запишем опять задачу (Z) в присоединенном базисе, опорном для данной субметрики, и перейдем сразу к задаче (Z_*) с полупространством управлений:

Задача (Z_*) **:**

$$\dot{x} = z\left(u_0 r_0(x) + \sum_{i=1}^{k-1} u_i r_i(x)\right), \tag{11.1}$$

$$\dot{z} = 0, \qquad x(0) = a, \quad x(T) = b, \tag{11.2}$$

$$u_0 \le 1, \qquad u_1, \dots, u_{k-1} \ - \ \text{свободны},$$

$$J = z(0) \longrightarrow \min,$$

Очевидно, любое достаточное условие $\Pi-$ минимума в задаче (Z_*) будет автоматически достаточным условием $\Pi-$ минимума в исходной задаче (Z), поэтому мы можем применить общие $\gamma-$ достаточные условия $\Pi-$ минимума из [18] к задаче (Z_*). Однако, как и в §5, сначала сделаем ряд переходов, которые позволят упростить эти условия. Введ„м следующие понятия.

Определение 11.1. Будем говорить, что последовательность $w_n = (z_n, x_n, u_n)$ сходится по понтрягински к $\hat{w} = (\hat{z}, \hat{x}, \hat{u})$, и писать $w_n \xrightarrow{\Pi} \hat{w}$, если

$$|z_n - \hat{z}| + ||x_n - \hat{x}||_\infty + ||u_n - \hat{u}||_1 \to 0, \qquad ||u_n - \hat{u}||_\infty \le \mathcal{O}(1).$$

Пусть $\mathcal{D}$ есть некоторое подмножество W, содержащее $\hat{w}$.

Определение 11.2. Будем говорить, что на множестве $\mathcal{D}$ выполнено свойство $\mathcal{F}$, если существует такое $C > 0$, что для любой последовательности $w_n \in \mathcal{D}$, $w_n \xrightarrow{\Pi} \hat{w}$, при всех достаточно больших n выполнена оценка

$$(z_n - 1)^+ + |x_n(T) - b| \ge C\gamma(w_n - \hat{w}). \tag{11.3}$$

Введем теперь множество

$$\mathcal{D}(Z_*) = \{w \mid \text{выполнено уравнение (11.1)},\ \dot{z} = 0,\ x(0) = a,\ u_0 \le 1\ \}.$$

Из теорем 7.1 и 7.2 из [18] вытекает

Теорема 11.1. Выполнение $\gamma-$ достаточного условия $\Pi-$ минимума для траектории $\hat{w}$ в задаче (Z_*) эквивалентно выполнению свойства $\mathcal{F}$ на множестве $\mathcal{D}(Z_*)$.

Далее, как и в §5, перейдем к задаче (S), которая отличается от задачи (Z_*) заменой уравнения (11.1) на

$$\dot{x} = zu_0 r_0(x) + \sum_{i=1}^{k-1} u_i r_i(x). \tag{11.4}$$

По аналогии с теоремой 5.2 имеет место

Теорема 11.2. $\gamma-$ достаточное условие $\Pi-$ минимума в задаче (Z_*) эквивалентно $\gamma-$ достаточному условию $\Pi-$ минимума в задаче (S).

Доказательство, с учетом теоремы 7.2 (ii) из [18], вытекает из следующей леммы, аналогичной лемме 5.1.

Лемма 11.1. Выполнение свойства $\mathcal{F}$ на множестве $\mathcal{D}(Z_*)$ эквивалентно его выполнению на множестве $\mathcal{D}(S)$.

(Множество $\mathcal{D}(S)$ было введено в §6.) Доказательство почти дословно повторяет доказательство леммы 5.1.

Выпишем теперь $\gamma-$ достаточное условие $\Pi-$ минимума для задачи (S). Для этого мы должны определить соответствующие объекты. Во-первых, это конус критических вариаций для задачи (S) в точке $\hat{w}$, который, согласно [18, §4], есть $\mathcal{K} \cap \mathcal{N}$, где $\mathcal{K}$ задается линеаризацией всех ограничений задачи, кроме ограничения на управление, а $\mathcal{N}$ состоит из вариаций, для каждого t касательных к допустимому множеству управлений в точке $\hat{u}(t)$. В данном случае $\forall\, t$ касательный конус к множеству $U_* = \{u \in \mathbb{R}^k \mid u_0 \le 1\}$ в точке $\hat{u}(t)$ один и тот же: $N = \{\bar{u} \in \mathbb{R}^k \mid \bar{u}_0 \le 0\}$.

Таким образом, $\mathcal{K}$ состоит из всех $\bar{w} = (\bar{z}, \bar{x}, \bar{u})$, удовлетворяющих уравнениям

$$\dot{\bar{x}} = \bar{z}\, r_0(\hat{x}) + r_0'(\hat{x})\bar{x} + \bar{u}_0 r_0(\hat{x}) + \sum_{i=1}^{k-1} \bar{u}_i r_i(\hat{x}), \tag{11.5}$$

$$\dot{\bar{z}} = 0, \qquad \bar{x}(0) = \bar{x}(T) = 0, \tag{11.6}$$

и неравенству $\bar{z} \le 0$ (линеаризация функционала), а $\mathcal{N} = \{\bar{w} \mid \bar{u}_0(t) \le 0 \text{ п.в.}\}$.

Кроме того, в конусе N выделяется максимальное линейное подпространство $N_0 \subset N$; в данном случае это гиперплоскость $\bar{u}_0 = 0$.

Как уже было установлено, $\Lambda(S, \hat{w}) = \Lambda(Z, \hat{w})$. Для каждого λ надо рассмотреть соответствующую функцию Лагранжа $\Phi[\lambda](w)$ и взять е,, вторую вариацию $\Omega[\lambda](\bar{w})$ на траектории $\hat{w}$. Выше мы выписывали квадратичную форму (7.11) для задачи (S_1). Поскольку в задаче (S) по сравнению с задачей (S_1) имеется дополнительное управление u_0, то теперь в квадратичной форме будут присутствовать ещ,, два члена:

$$-\int_0^T \Big(\bar{z}\bar{u}_0\, \psi r_0(\hat{x}) \;+\; \bar{u}_0\, \psi(r_0'(\hat{x})\, \bar{x})\Big)\, dt, \tag{11.7}$$

однако на отбор λ в множества $G_a(\Lambda)$ это не повлияет: можно показать, что, как и для задачи (S_1), этот отбор зада„тся условиями (7.17), (7.18); других условий не появится (см. Приложение C). Впрочем, мы не будем пользоваться этим фактом, также как и конкретным видом формы $\Omega[\lambda](\bar{w})$; снабдим лишь е„ индексом S.

Далее, согласно [18, §4] (см. также [7, 10]), для данной управляемой системы (11.4), (11.2) и для любого λ определяется кубический функционал $\rho[\lambda](\bar{w})$, который рассматривается на линейных связях (11.5), (11.6) при $\bar{u}(t) \in N_0$ почти всюду (т.е. в данном случае при $\bar{u}_0(t) = 0$ ..). С помощью этого функционала определяются подмножества $E_a(\Lambda)$ множеств $G_a(\Lambda)$. А именно, $\forall\, a$ множество $E_a(\Lambda)$ состоит из всех тех $\lambda \in G_a(\Lambda)$, для которых функционал $\rho[\lambda](\bar{w})$ на указанном подпространстве $\bar{w}$ удовлетворяет некоторому дополнительному условию типа равенства. В данном случае это условие означает (см. Приложение E), что

$$\psi(t)\,[\,r_i, [r_j, r_s]\,]\,(\hat{x}(t)) = 0 \qquad \forall\, i, j, s = 1, \dots, k-1. \tag{11.8}$$

Отметим, что в отличие от условий (7.17), (7.18), выполнение этого условия уже *зависит от выбора присоединенного базиса.* Более того, как показал А.А.Милютин, если для некоторого базиса оно выполнено, то для всех других достаточно близких базисов оно не выполняется.

Теперь мы можем сформулировать достаточное условие $\Pi-$ минимума в задаче (S). Из теорем 7.1, 7.2 и 7.4 из [18] вытекает

Теорема 11.3. Пусть при некотором $a > 0$

$$\Omega_S\,[E_0(\Lambda(S))](\bar{w}) \geq a\gamma(\bar{w}) \qquad \forall\, \bar{w} \in \mathcal{K} \cap \mathcal{N}. \tag{11.9}$$

Тогда $\hat{w}$ есть точка строгого $\Pi-$ минимума в задаче (S).
Неравенство (11.9) эквивалентно неравенству

$$\Omega_S\,[E_a(\Lambda(S))](\bar{w}) \geq a\gamma(\bar{w}) \qquad \forall\, \bar{w} \in \mathcal{K} \cap \mathcal{N}, \tag{11.10}$$

(при этом автоматически $E_a(\Lambda(S))$ непусто), а также эквивалентно выполнению свойства $\mathcal{F}$ на множестве $\mathcal{D}(S)$.

12 Переход к $u_0 = 1$

Итак, мы имеем $\gamma-$ достаточное условие $\Pi-$ минимума для траектории $\hat{w}$ в задаче (S). Перейдем теперь от полупространства $u_0 \leq 1$ к подпространству $u_0 = 1$, т.е. к задаче (S_1). Здесь, однако, сделать этот переход сразу, как это делалось в

§6, не получится. Мы сделаем его за два шага: сначала перейдем к промежуточной задаче $(S_{\frac{1}{2}})$, в которой множество управлений $U_{\frac{1}{2}}$ есть полоса $\frac{1}{2} \le u_0 \le 1$, а затем уже к задаче (S_1) с множеством управлений $u_0 = 1$. Причины использования промежуточной задачи пояснены ниже в доказательстве леммы 12.1.

Рассмотрим первый шаг этого перехода. Так как в равномерной окрестности $\hat{u}(t)$ множество U_* совпадает с множеством $U_{1/2}$, то при переходе от задачи (S) к задаче $(S_{\frac{1}{2}})$ множество $\Lambda(\hat{w})$ не изменится, поэтому семейство функций Лагранжа и соответствующие семейства квадратичных форм $\Omega[\lambda](\bar{w})$ и кубических функционалов $\rho[\lambda](\bar{w})$ не изменятся. Кроме того, касательный конус N к множествам $u_0 \le 1$ и $\frac{1}{2} \le u_0 \le 1$ в точке $\hat{u}$ (для которой $\hat{u}_0 = 1$) будет один и тот же. Поэтому и множества $G_a(\Lambda)$, $E_a(\Lambda)$ для задачи $(S_{\frac{1}{2}})$ будут теми же, что и для задачи (S). Таким образом, все объекты, участвующие в формулировке $\gamma-$ достаточных условий $\Pi-$ минимума , т.е. в неравенствах (11.9), (11.10), будут теми же самыми для обеих задач. Поэтому справедлива

Теорема 12.1. $\gamma-$ достаточное условие $\Pi-$ минимума в задаче (S) совпадает с $\gamma-$ достаточным условием $\Pi-$ минимума в задаче $(S_{\frac{1}{2}})$.

Теперь рассмотрим переход от задачи $(S_{\frac{1}{2}})$ к задаче (S_1) с подпространством $u_0 = 1$ в качестве множества управлений. Как было установлено в §6, при этом множество $\Lambda(\hat{w})$ не изменяется.

Теорема 12.2. $\gamma-$ достаточное условие $\Pi-$ минимума в задаче $(S_{\frac{1}{2}})$ эквивалентно $\gamma-$ достаточному условию $\Pi-$ минимума в задаче (S_1) .

Доказательство, с учетом теоремы 7.2 (ii) из [18], вытекает из следующей

Лемма 12.1. Выполнение свойства $\mathcal{F}$ на множестве $\mathcal{D}(S_{\frac{1}{2}})$ эквивалентно его выполнению на множестве $\mathcal{D}(S_1)$.

Доказательство аналогично доказательству леммы 6.2. Поскольку $\mathcal{D}(S_{\frac{1}{2}}) \supset \mathcal{D}(S_1)$, то, как и раньше, достаточно доказать импликацию $(\Longleftarrow)$. Мы докажем обратно-противоположную импликацию. Для этого достаточно доказать, что существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что если $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$ и для некоторой последовательности $w_n \in \mathcal{D}(S_{\frac{1}{2}})$, $w_n \ne \hat{w}$, $w_n \xrightarrow{\Pi} \hat{w}$ выполнена оценка

$$\sigma(w_n) = (z_n - 1)^+ + |x_n(T) - b| \le \varepsilon\, \gamma(w_n - \hat{w}), \tag{12.1}$$

то существует последовательность $w'_n \in \mathcal{D}(S_1)$, $w'_n \ne \hat{w}$, $w'_n \xrightarrow{\Pi} \hat{w}$, для которой

$$\sigma(w'_n) \ \le \ Q\varepsilon\, \gamma(w'_n - \hat{w}), \tag{12.2}$$

где Q – константа, не зависящая от последовательности и от ε .

Будем следовать доказательству леммы 6.2. Пусть дана последовательность w_n, удовлетворяющая (12.1) с некоторым $\varepsilon > 0$. Опять перепараметризуем каждый е„ член так, чтобы для новой последовательности w'_n стало $u'_{0,n}(t) = 1$.

Так как у нас $\frac{1}{2} \le u_{0,n}(t) \le 1$ (т.е. $\delta = 1/2$), то функция $s_n(t)$, определенная формулой (6.8), по-прежнему будет задавать взаимно-липшицево отображение отрезка [0,T] на себя $(\frac{1}{2} \le \dot{s}_n(t) \le 2)$, поэтому требуемая параметризация имеется. (Именно в этом месте мы пользуемся тем, что $u_{0,n}(t)$ отделено снизу от нуля. Если бы, как и раньше, мы имели только неравенство $u_{0,n}(t) \le 1$, то, поскольку u_n сходится к $\hat{u}$ теперь не равномерно, а лишь по понтрягински, для любых n на множестве положительной меры возможно $u_{0,n}(t) < 0$, и тогда указанная перепараметризация траектории w_n не получилась бы.)

Траектория w_n', построенная по формулам (6.10), (6.11), принадлежит $\mathcal{D}(S_1)$. Так как $\int_0^T |1-u_{0,n}|\,dt \to 0$, то $\theta_n \to 1-0$, поэтому и $z_n' \to 1-0$, а так как $\forall\, i = 1,\dots,k-1$

$$\int_0^T |u_{i,n}'(s)|\,ds = \int_0^T |u_{i,n}(t)|\,dt \to 0,$$

то опять из (6.12) и оценок типа Гронуолла вытекает, что $||x_n' - \hat{x}||_C \to 0$. Следовательно, $w_n' \xrightarrow{\Pi} \hat{w}$.

Порядок γ для задач $(S_{\frac{1}{2}})$ и (S_1) определяется теми же формулами (6.5), (6.6), поэтому неравенство (12.1) для w_n означает, аналогично (6.16), что (опускаем индекс n) :

$$(z-1)^+ + |x(T)-b| \;\le\; \varepsilon\left(|\bar{z}|^2 + |\bar{y}_0(T)|^2 + \eta(y)\right). \tag{12.3}$$

Мы же хотим показать, что тогда

$$(z'-1)^+ + |x(T)-b| \;\le\; Q\varepsilon\,\left(|\bar{z}'|^2 + \eta(y')\right), \tag{12.4}$$

где Q не зависит от последовательности и от ε.

Так как неравенства (6.9) теперь выполнены при $\delta = \frac{1}{2}$, то при этом δ выполнено и (6.18), т.е.

$$\frac{1}{2}\,\eta(y) \;\le\; \eta(y') \;\le\; 2\,\eta(y). \tag{12.5}$$

Далее полагаем $p = -(1/T)\bar{y}_0(T)$ и по аналогии с (6.20) получаем оценку:

$$(z-1)^+ + |x(T)-b| \;\le\; \varepsilon\cdot C(T)\,\left(|\bar{z}'|^2 + p^2 + \eta(y')\right), \tag{12.6}$$

где $C(T)$ – некоторая константа, зависящая только от T.

Обозначим через $\mathcal{M}_\varepsilon$ класс всех последовательностей $w_n \in \mathcal{D}(S_{\frac{1}{2}})$, $w_n \xrightarrow{\Pi} \hat{w}$, $w_n \ne \hat{w}$ (при больших n), для которых выполнена оценка (12.3), или, что то же самое, (12.1). Допустим, что существуют $\varepsilon_0 > 0$ и такая константа K, что для любой последовательности из класса $\mathcal{M}_{\varepsilon_0}$ выполнена оценка

$$p^2 \le K\left(|\bar{z}'|^2 + \eta(y')\right). \tag{12.7}$$

Так как при уменьшении ε класс $\mathcal{M}_\varepsilon$ сужается, то эта константа K годится и для любого класса $\mathcal{M}_\varepsilon$ при $\varepsilon < \varepsilon_0$. А так как нам и достаточно рассматривать

$\varepsilon \le \varepsilon_0$, то тогда из (12.6), (12.7) и неравенства $z' \le z$ получаем требуемую оценку (12.4).

Покажем теперь, что такая константа K существует для класса $\mathcal{M}_\varepsilon$ даже при любом $\varepsilon > 0$. Допустим, что при некотором $\varepsilon > 0$ такой константы нет, т.е. для любого $\alpha > 0$ существует последовательность w_n из класса $\mathcal{M}_\varepsilon$, для которой

$$|\bar{z}'|^2 + \eta(y') \le \alpha\, p^2. \tag{12.8}$$

Тогда из (12.6) получаем

$$(\bar{z})^+ + |x(T) - b| \;\le\; \varepsilon \cdot C(T)\,(1+\alpha)\,p^2. \tag{12.9}$$

При этом $\theta\bar{z} = \bar{z}' + p$, и $\theta \to 1$, следовательно,

$$(\bar{z}' + p)^+ \;\le\; 2\,C\varepsilon\,(1+\alpha)\,p^2. \tag{12.10}$$

Из (12.8) вытекает, что $|\bar{z}'| \le \sqrt{\alpha}p$. Будем считать $\alpha \le 1/4$. Тогда из $p \ge 0$ следует $(\bar{z}' + p)^+ \ge (1 - \sqrt{\alpha})p \ge \frac{1}{2}\,p$, и в силу (12.10) $\frac{1}{2}\,p \le 3\,C\varepsilon\,p^2$, а отсюда, поскольку $p_n \to 0+$ (опять пишем индекс n), очевидно следует, что $p_n = 0$ при больших n.

Но тогда и $\bar{z}'_n = 0$, $\bar{z}_n = 0$, т.е. $z_n = 1$, а в силу (12.8) $\eta(y'_n) = 0$, следовательно, $\eta(y_n) = 0$, т.е. $u_{i,n}(t) \equiv 0$, $i = 1, \ldots, k-1$. Кроме того, из $p_n = 0$ следует $\theta_n = 1$, $u_0(t) \equiv 1$, и тогда $x_n = \hat{x}_n$. Таким образом, при больших n траектория w_n совпадает с $\hat{w}$, что противоречит определению класса $\mathcal{M}_\varepsilon$. Следовательно, требуемая константа K существует. (Из привед„нных рассуждений видно, что заведомо годится $K = \min \frac{1}{\alpha} = 4$.) Лемма 12.1 доказана, а вместе с ней доказана и теорема 12.2.

13 Квадратичные условия $\Pi-$ минимума в задаче (S_1)

Итак, мы перешли к $\gamma-$ достаточным условиям $\Pi-$ минимума в задаче (S_1). В этой задаче управление $u \in \mathbb{R}^{k-1}$ свободно, поэтому согласно §11 (см. также [7, 18]) $\gamma-$ условия $\Pi-$ минимума отличаются от $\gamma-$ условий слабого минимума дополнительным условием (11.8), которому должно удовлетворять $\lambda \in \Lambda(\hat{w})$, или, что то же самое, $\psi \in \Psi(\hat{w})$. Условия слабого минимума для задачи (S_1) были выписаны в §7. Конус критических вариаций здесь есть подпространство, задаваемое равенствами (7.6), (7.8), (7.9), квадратичная форма $\Omega[\psi](\bar{w})$ имеет вид (7.11), порядок γ задается формулой (7.19). Множество $G_a(\Psi)$ состоит из всех $\psi \in \Psi$, удовлетворяющих условиям (7.17), (7.18), а множество $E_a(\Psi)$ состоит из тех ψ, которые, кроме этих условий, удовлетворяют также равенствам (11.8).

Согласно теореме 7.1 (ii) из [18], $\gamma-$ достаточное условие $\Pi-$ минимума для точки $\hat{w}$ в задаче (S_1) состоит в том, что при некотором $a > 0$

$$\Omega\,[E_0(\Psi)](\bar{w}) \geq a \int_0^T |\bar{y}|^2\,dt \qquad \forall\,\bar{w} \in \mathcal{K}. \tag{13.1}$$

(Это неравенство автоматически подразумевает, что $E_0(\Psi)$ непусто.)
Согласно [6, 7, 9], это условие эквивалентно тому, что при том же $a > 0$

$$\Omega\,[E_a(\Psi)](\bar{w}) \;\geq\; a \int_0^T |\bar{y}|^2\,dt \qquad \forall\,\bar{w} \in \mathcal{K}. \tag{13.2}$$

Отсюда с учетом теорем 12.2, 12.1, 11.2 получаем окончательный вид квадратичных достаточных условий $\Pi-$ минимума для особой траектории $\hat{w}$ в задаче (Z_*) :

Теорема 13.1. Пусть $\hat{w} = (\hat{z} = 1, \hat{x}(t), \hat{u} = (1, 0, \ldots, 0))$ есть особая траектория задачи (Z_*), и для нее при некотором $a > 0$ выполнено неравенство (13.1) или (13.2). Тогда $\hat{w}$ есть точка строгого $\Pi-$ минимума в задаче (Z_*).

Напомним, что $\Pi-$ минимум в задаче (Z_*) с полупространством управлений $u_0 \leq 1$ означает, что для любого ограниченного множества $B \subset \mathbb{R}^k$ в задаче (Z_*) с множеством управлений $\{u_0 \leq 1\} \cap B$ в точке $\hat{w}$ имеется минимум относительно нормы $||w||_1 = |z| + ||x||_C + ||u||_1$.

Теперь, как и в §7, воспользуемся следствием 2 из леммы 3.1 о том, что особость траектории $\hat{w}$ в задаче (Z_*) эквивалентна ее особости в исходной задаче (Z), и понятием пучка субметрик, соответствующего данному базису. Тогда получаем следующее усиление теоремы 13.1:

Теорема 13.2. Пусть $\hat{w} = (\hat{z} = 1, \hat{x}(t), \hat{u} = (1, 0, \ldots, 0))$ есть особая траектория задачи (Z_*), записанной в некотором присоединенном базисе, и пусть для нее при некотором $a > 0$ выполнено неравенство (13.1) или (13.2). Тогда в задаче (Z) с любой субметрикой из пучка, соответствующего этому базису, $\hat{w}$ есть точка строгого минимума относительно нормы $||w||_1$.

Это и есть результат "прямого"применения общих квадратичных условий $\Pi-$ минимума из [18] к задаче (Z). Как и в §7, недостатком этого результата является присутствующее в нем предположение об особости $\hat{w}$. В §14 мы покажем, что и здесь от этого предположения можно освободиться.

А пока, как и в §7, обратим внимание, что функционал J никак не входит в условия (13.1) и (13.2), а сами эти условия совпадают с полученными в [17]

$\gamma-$ достаточными условиями т.н. понтрягинской жесткости траектории $\hat{w}$ для системы (Ж).

Определение 13.1 [17]. Гладкая $\Gamma-$ допустимая кривая $\hat{x}(t),\ t \in [0,T]$, соединяющая точки a и b, называется *понтрягински жесткой* (сокращенно П− *жесткой*) по отношению к данному присоедин„нному базису, если соответствующая ей траектория $(\hat{x}(t), \hat{u}(t) = (1, 0, \ldots, 0))$ системы $\dot{x} = u_0 r_0(x) + \sum u_i r_i(x)$ обладает следующим свойством: для любых $K, h > 0$ существует $\varepsilon > 0$ такое, что любая траектория $(x(t), u(t)),\ t \in [0,T]$ этой системы, соединяющая те же точки и удовлетворяющая неравенствам $||x - \hat{x}||_C + ||u - \hat{u}||_1 < \varepsilon,\quad ||u||_\infty \le K,\ u_0(t) \ge h$ п.в., является перепараметризацией траектории $(\hat{x}(t), \hat{u}(t))$.

Нетрудно показать, что это свойство эквивалентно тому, что для любого K траектория $\hat{w} = (\hat{z} = 1, \hat{x}(t), \hat{u} = 0)$ системы (Ж) является изолированной относительно нормы $||w||_1$ во множестве всех траекторий этой системы на данном отрезке $[0,T]$, удовлетворяющих ограничению $||u||_\infty \le K$.

Определение 13.2 [17]. Траектория $\hat{w} = (\hat{z} = 1, \hat{x}(t), \hat{u} = 0)$ системы (Ж) называется *квадратично* П− *жесткой* в данном присоедин„нном базисе, если при некотором $a > 0$ для нее выполнено неравенство (13.1) или (13.2).

В [17] доказано, что квадратично П− жесткая траектория является П− жесткой в данном базисе. Свойство квадратичной П− жесткости, в отличие от "обычной"жесткости, уже зависит от выбора присоединенного базиса (т.к. от выбора базиса зависит выполнение условия (11.8)), а точнее, зависит от задания подпространства $\Gamma_0(x)$, и не зависит от выбора базиса в $\Gamma_0(x)$, а также от параметризации данной кривой $\hat{x}$.

Пользуясь введенными терминами, получаем следующую переформулировку теоремы 13.2, связывающую понятия П− жесткости и П− минимума .

Теорема 13.3. Пусть особая траектория $\hat{w} = (\hat{z} = 1, \hat{x}(t), \hat{u} = (1, 0, \ldots, 0))$ задачи (Z_*), записанной в некотором присоединенном базисе, является квадратично П− жесткой. Тогда она есть точка строгого П− минимума в задаче (Z_*), или, другими словами, она есть точка строгого минимума относительно нормы $||w||_1$ в задаче (Z) с любой субметрикой из пучка, определяемого данным базисом.

Для доказательства этой теоремы мы проделали путь

$$\text{задача}\,(Z)\ \to\ \text{задача}\,(Z_*)\ \to\ \text{задача}\,(S)\ \to$$

$$\to\ \text{задача}\,(S_{\frac{1}{2}})\ \to\ \text{задача}\,(S_1)\ \to\ \text{система (Ж)}.$$

На этом мы закончим процедуру непосредственного применения общих квадратичных достаточных условий П− минимума для особых траекторий к задаче о геодезических, и перейдем к освобождению от предположения об особости $\hat{w}$.

14 Условия $\Pi-$ минимума для квадратично $\Pi-$ жестких траекторий

В этом параграфе наша цель – освободиться от предположения об особости в теоремах 13.1 – 13.3, т.е. доказать следующую теорему.

Теорема 14.1. (Основная теорема 2.) Пусть траектория $\hat{w} = (\hat{z} = 1, \hat{x}(t), \hat{u} = (0, \dots, 0))$ системы (Ж), записанной в некотором присоединенном базисе, является квадратично $\Pi-$ жесткой, т.е. при некотором $a > 0$ для нее выполнено неравенство (13.1) или (13.2). Тогда она есть точка строгого $\Pi-$ минимума в задаче (Z_*) для этого базиса, и следовательно, является точкой строгого минимума относительно $||w||_1$ в задаче (Z) с любой субметрикой из пучка, определяемого этим базисом.

Для доказательства проделаем тот же путь, что и в §11–13, но в обратном порядке: от системы (Ж) к задаче (Z_*), подобно тому, как это делалось в части II. В отличие от ситуации §8, теперь базис у нас фиксирован: в системе (Ж) и задаче (Z_*) он один и тот же. Кроме того, так как второе утверждение теоремы 14.1 (о задаче (Z)) есть тривиальное следствие первого (о задаче (Z_*)), а в задаче (Z_*) субметрики нет, то фактически в доказательстве этой теоремы субметрика вообще не участвует.

Итак, пусть траектория $\hat{w}$ системы (Ж) удовлетворяет условиям (13.1) или (13.2) при $a > 0$. Как и в §9, сначала перейдем к системе $(')$. При этом подпространство критических вариаций расширится, и расширится также множество $\Lambda(\hat{w})$. По-прежнему справедлива лемма 9.1, описывающая множество $\Lambda(', \hat{w})$. Более того, из нее вытекает следующее нужное нам свойство.

Лемма 14.1. При иньекции из леммы 9.1 множество $E_a(\Lambda('))$ с точностью до нормировки есть выпуклая оболочка множества $\pi\left((E_a(\Lambda()))\right)$ и точки λ_0. (Очевидно, $\lambda_0 \in E_a(\Lambda('))$, ибо имеет $\psi \equiv 0$.)

Переход к системе $(')$ обеспечивает

Теорема 14.2. Пусть для траектории $\hat{w}$ в системе (Ж) выполнена квадратичная $\Pi-$ жесткость. Тогда она выполнена и в системе $(')$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 9.1 с тем лишь изменением, что в квадратичное условие $\Pi-$ жесткости входит максимум не по всем $\lambda \in \Lambda$, а только по $\lambda \in E_0(\Lambda)$ (или по $E_a(\Lambda)$). Однако это совершенно не влияет на справедливость всех рассуждений в доказательстве теоремы 9.1.

Далее переходим к задаче (P_1), получающуюся при добавлении к системе $(')$ функционала $J = z(0) \to \min$. Как было установлено в §10, при этом подпространство критических вариаций и множество $\Lambda(\hat{w})$ не меняются, следовательно, по аналогии с теоремой 10.1 справедлива

Теорема 14.3. Пусть в системе $(')$ для траектории $\hat{w}$ выполнена понтрягинская $\gamma-$ достаточность. Тогда она выполнена и в задаче (P_1), т.е. при некотором $a > 0$

$$\max_{E_a(\Lambda(P_1))} \Omega[\lambda](\bar{w}) \geq a\gamma(\bar{w}) \qquad \forall\, \bar{w} \in \mathcal{K}(P_1). \tag{14.1}$$

Следующий шаг состоит в переходе от задачи (P_1) к задаче $(P_{\frac{1}{2}})$, в которой уравнение

$$\dot{x} = z\, r_0(x) + \sum_{i=1}^{k-1} u_i r_i(x) \tag{14.2}$$

заменено на

$$\dot{x} = z\, u_0 r_0(x) + \sum_{i=1}^{k-1} u_i r_i(x), \tag{14.3}$$

а появившееся управление u_0 ограничено неравенствами $\frac{1}{2} \leq u_0 \leq 1$.
По аналогии с теоремой 12.2 справедлива

Теорема 14.4. $\gamma-$ достаточное условие $\Pi-$ минимума в задаче (P_1) эквивалентно $\gamma-$ достаточному условию $\Pi-$ минимума в задаче $(P_{\frac{1}{2}})$.

Доказательство, с учетом теоремы 7.2 (ii) из [18], вытекает из

Леммы 14.2. Выполнение свойства $\mathcal{F}$ на множестве $\mathcal{D}(P_1)$ эквивалентно его выполнению на множестве $\mathcal{D}(P_{\frac{1}{2}})$.

Доказательство повторяет доказательство леммы 12.1 с тем лишь изменением, что теперь в функции нарушения вместо $|x(T) - b|$ надо брать $|\Delta x_M(T)| + |\Delta x_L(T)|^2$. Опять замечаем, что поскольку член $|x(T) - b|$ принимал лишь "пассивное"участие во всех рассуждениях, то при такой замене ничего не изменится. Подробную проверку мы оставляем читателю.

Затем мы переходим от задачи $(P_{\frac{1}{2}})$ к задаче (P) с множеством управлений $u_0 \leq 1$. Поскольку это множество и множество $\frac{1}{2} \leq u_0 \leq 1$ в окрестности точки $\hat{u}_0 = 1$ совпадают, касательный конус N и множество $\Lambda(\hat{w})$ при таком переходе не изменятся. Тогда (как и в §12) не изменятся и семейства функций Лагранжа, их вторых вариаций $\Omega[\lambda](\bar{w})$ и соответствующих кубических функционалов $\rho[\lambda](\bar{w})$. Таким образом, все объекты, участвующие в формулировке $\gamma-$ достаточных условий $\Pi-$ минимума в обеих задачах, будут теми же самыми. Поэтому, аналогично теореме 12.1, справедлива

Теорема 14.5. $\gamma-$ достаточное условие П$-$ минимума в задаче $(P_{\frac{1}{2}})$ эквивалентно $\gamma-$ достаточному условию П$-$ минимума в задаче (P).

Наконец, от задачи (P) перейдем к задаче (Y_*) (см. §10), которая получается заменой уравнения (14.3) на исходное уравнение (11.1) (в котором z умножается на всю правую часть, а не только на ее первый член).

Лемма 14.3. Выполнение свойства $\mathcal{F}$ на множестве $\mathcal{D}(P)$ эквивалентно его выполнению на множестве $\mathcal{D}(Y_*)$.

Доказательство аналогично доказательству леммы 11.1, которое, в свою очередь, почти дословно повторяет доказательство леммы 5.1.

Отсюда, с учетом теоремы 7.2 (ii) из [18], вытекает следующая теорема, аналогичная теореме 11.2.

Теорема 14.6. $\gamma-$ достаточное условие П$-$ минимума в задаче (P) эквивалентно $\gamma-$ достаточному условию П$-$ минимума в задаче (Y_*).

Суммируя сделанные переходы, из теорем 14.2 – 14.6 получаем следующую

Теорему 14.7. Пусть для траектории $\hat{w}$ в системе (Ж) выполнена квадратичная П$-$ жесткость, т.е. при некотором $a > 0$ выполнено неравенство (13.1) или (13.2). Тогда для нее выполнено $\gamma-$ достаточное условие П$-$ минимума в задаче (Y_*), и следовательно, $\hat{w}$ есть точка строгого П$-$ минимума в задаче (Y_*).

Но теперь, как и в §10, остается заметить, что строгий П$-$ минимум в задаче (Y_*) совпадает со строгим П$-$ минимумом в задаче (Z_*), которая отличается от задачи (Y_*) лишь тем, что правое граничное условие в ней имеет исходный вид $x(T) - b = 0$. Поэтому из теоремы 14.7 вытекает теорема 14.1, доказательство которой и было целью данного параграфа.

Таким образом, здесь мы проделали путь

$$\text{система (Ж)} \to \text{система}\,(') \to \text{задача}\,(P_1) \to \text{задача}\,(P_{\frac{1}{2}}) \to$$

$$\to \text{задача}\,(P) \to \text{задача}\,(Y_*) \to \text{задача}\,(Z_*),$$

но на этот раз без предположения об особости траектории $\hat{w}$ в задаче (Z_*).

Часть IV. Специальные случаи, примеры и доказательства вспомогательных утверждений

15 Специальные случаи

Здесь мы покажем, во что превращаются Основные теоремы в двух специальных случаях: когда распределение двумерно, и когда отрезок кривой достаточно мал.

15.1 Двумерный случай.

Пусть $k = \dim \Gamma(x) = 2$. Тогда в задаче (S_1) и системе (Ж) управление одномерно: $u = u_1 \in \mathbb{R}$. Как хорошо известно, задачи с одномерным управлением существенно проще задач, в которых управление многомерно. В этом случае условие (11.8) (а также условие (7.17)) выполнено автоматически, следовательно, $E_a(\Lambda) = G_a(\Lambda)$, и $\gamma-$ достаточное условие $\Pi-$ минимума в задачах (Z_*), (S), (S_1) совпадает с $\gamma-$ достаточным условием слабого минимума, а квадратичная жесткость в системе (Ж) совпадает с квадратичной Π -жесткостью. Но поскольку квадратичная жесткость траектории сохраняется в любом присоединенном базисе, то для двумерного распределения из теоремы 14.1 получается следующая

Теорема 15.1. Пусть $\Gamma-$ допустимая кривая $\hat{x}(t)$, соединяющая точки a, b, является квадратично жесткой, т.е. в некотором присоединенном базисе для траектории $\hat{w} = (\hat{z} = 1, \hat{x}(t), \hat{u} = 0)$ системы (Ж) выполнено неравенство (7.20) или (7.21) при некотором $a > 0$. Тогда в любом присоединенном базисе траектория $\hat{w}$ есть точка строгого $\Pi-$ минимума в задаче (Z_*), и следовательно, для любой субметрики, имеющей опорную (не обязательно строгую опорную) гиперплоскость в окрестности $\hat{x}(t)$, траектория $\hat{w} = (\hat{z} = 1, \hat{x}(t), \hat{u} = (1, 0, \ldots, 0))$ есть точка строгого минимума в задаче (Z) относительно $||w||_1$.

Сравним эту теорему с теоремой 8.1. Условие (посылка) у них одно и то же. Заключение же отличается от теоремы 8.1 тем, что, с одной стороны, теперь не требуется строгости опорной гиперплоскости, но, с другой стороны, гарантируется не сильная минимальность данной траектории, и лишь ее минимальность относительно $||w||_1$.

Теорема 15.1 по-прежнему сильнее теоремы 5.2 из [16]: в последней допускается только субриманова метрика, и неравенство (7.21) должно выполняться для отдельной квадратичной формы при некотором $\psi \in G_a(\Psi_0))$.

15.2 Достаточные условия для малых отрезков кривой

Пусть $\hat{x}(t)$, $t \in [0, T]$ есть $\Gamma-$ допустимая кривая, и $\hat{w} = (\hat{z} = 1, \hat{x}(t), \hat{u} = (1, 0, \ldots, 0))$ есть соответствующая траектория задачи (Z) в некотором присоединенном базисе. Мы будем рассматривать эту задачу, а также соответствующую систему (Ж), на любом отрезке $\Delta = [t_1, t_2] \subset [0, T]$ с концевыми условиями

$x(t_1) = \hat{x}(t_1),\ x(t_2) = \hat{x}(t_2),$ т.е. будем изучать вопрос о минимальности и жесткости данного отрезка кривой во множестве всех $\Gamma-$ допустимых кривых, соединяющих его начальную и конечную точки. При этом соответствующую задачу, систему и траекторию будем помечать индексом Δ.

Для траектории $\hat{w}_\Delta$ нам будет удобно ввести множество

$$G_+(\Psi_0(\hat{w}_\Delta)) = \bigcup_{a>0} G_a(\Psi_0(\hat{w}_\Delta)). \tag{15.1}$$

Дадим сначала следующее определение, в котором субметрика не участвует.

Определение 15.1. Следуя [17], кривую $\hat{x}(t)$ будем называть *квадратично жесткой на малых отрезках,* если существует $\delta > 0$ такое, что для любого отрезка $\Delta \subset [0,T]$ длины $|\Delta| \le \delta$ множество $G_+(\Psi_0(\hat{w}_\Delta))$ непусто, т.е. существует $n-$ мерная липшицева функция $\psi(t)$, удовлетворяющая на Δ сопряженному уравнению (7.1), равенствам (7.2), (7.17) и неравенству (7.18) при некотором $a = a(\Delta) > 0.$

Как показано в [17, §6], выполнение этого "локального"свойства не влечет даже стационарности траектории $\hat{w}$ на всем отрезке [0,T], т.е. непустоты $\Psi_0(\hat{w})$, не говоря уже о непустоте $G_+(\Psi_0(\hat{w}))$. С другой стороны, в [17, §5] и [18, §6] доказана

Теорема 15.2. Пусть кривая $\hat{x}(t)$ квадратично жесткая на малых отрезках. Тогда существует $\delta > 0$ такое, что для любого $\Delta \subset [0,T],\ |\Delta| \le \delta$ неравенство (7.21) выполнено при некотором $a = a(\Delta) > 0,$ т.е. кривая $\hat{x}_\Delta(t)$ является квадратично жесткой.

Таким образом, если кривая квадратично жесткая на малых отрезках, то все ее достаточно малые отрезки действительно являются квадратично жесткими, т.е. смысл введенного понятия соответствует его формальному названию.

Пусть теперь задана некоторая субметрика. Запишем задачу (Z) в присоединенном базисе для данной кривой $\hat{x}(t)$, опорном для этой субметрики.

Определение 15.2. Будем говорить, что кривая $\hat{x}(t)$ доставляет *понтрягинский (сильный) минимум в задаче (Z) на малых отрезках*, если существует $\delta > 0$ такое, что для любого $\Delta \subset [0,T],\ |\Delta| \le \delta$ траектория $\hat{w}_\Delta = (\hat{z} = 1, \hat{x}(t), \hat{u} = (1,0,\dots,0))$ доставляет понтрягинский (соответственно, сильный) минимум в задаче (Z_Δ).

Определение 15.3. Будем говорить, что кривая $\hat{x}(t)$ доставляет *глобальный минимум расстояния на малых отрезках*, если существует $\delta > 0$ такое, что для любого $\Delta \subset [0,T],\ |\Delta| \le \delta$ кривая $\hat{x}_\Delta$ является кратчайшей среди всех $\Gamma-$ допустимых кривых, соединяющих те же начальную и конечную точки, т.е. соответствующая траектория $\hat{w}_\Delta$ является точкой глобального минимума в задаче (Z_Δ) с данной субметрикой.

Из лемм 8.1 – 8.3 статьи [18] вытекает

Лемма 15.1. Если в задаче (Z) кривая $\hat{x}(t)$ доставляет сильный (строгий сильный) минимум расстояния на малых отрезках, то она доставляет и глобальный (строгий глобальный) минимум расстояния на малых отрезках.

Отсюда, из теорем 15.2 и 8.1 получаем

Теорему 15.3. (Достаточное условие глобального минимума на малых отрезках.) Пусть кривая $\hat{x}(t)$ квадратично жесткая на малых отрезках. Тогда для любой субметрики на $\Gamma(x)$, имеющей строгую опорную гиперплоскость в окрестности $\hat{x}(t)$, эта кривая доставляет строгий глобальный минимум расстояния на малых отрезках.

Эта теорема сильнее результатов [13, Теорема 5] и [16, Следствие 5.2], так как в обеих этих работах: а) допускались только двумерные распределения и только субримановы метрики; б) предполагалось, что $G_+(\Psi_0(\hat{w}[0,T]))$ непусто, тогда как в теореме 15.3 траектория $\hat{w}$ на всем отрезке [0,T] может даже не быть стационарной.

Перейдем к рассмотрению теоремы 14.1 о понтрягинском минимуме. Напомним, что в задаче (Z) с любой субметрикой понтрягинский минимум эквивалентен минимуму относительно $||w||_1$. Установим сначала следующий простой факт.

Лемма 15.2. Если в задаче (Z) траектория $\hat{w}$ доставляет $\Pi-$ минимум на малых отрезках, то она доставляет и сильный минимум на малых отрезках, а тогда, по лемме 15.1, и глобальный минимум на малых отрезках. То же самое верно и для строгих минимумов.

Доказательство. Пусть существует $\delta > 0$ такое, что для любого отрезка $\Delta \subset [0,T]$ длины $|\Delta| \le \delta$ существует $\varepsilon = \varepsilon(\Delta) > 0$ такое, что для любой допустимой траектории $w_\Delta = (z,x,u)$ задачи (Z_Δ), удовлетворяющей неравенству

$$|z-1| + ||x-\hat{x}||_C + ||u-\hat{u}||_1 < 2\varepsilon, \tag{15.2}$$

выполняется неравенство $J(w_\Delta) \ge J(\hat{w}_\Delta)$. Из соображений компактности следует, что ε можно считать общим для всех $\Delta,\ |\Delta| \le \delta$.

Таким образом, существуют $\delta,\, \varepsilon > 0$ такие, что для любого отрезка $\Delta \subset [0,T]$ длины $|\Delta| \le \delta$, для любой допустимой траектории $w_\Delta = (z,x,u)$ задачи (Z_Δ), удовлетворяющей неравенству (15.2), имеем $J(w_\Delta) \ge J(\hat{w}_\Delta)$.

Пусть число K таково, что $|U(x)| \le K$ для всех x из $\varepsilon-$ окрестности множества $\hat{\chi}$. Тогда для любой допустимой w_Δ, удовлетворяющей неравенству $|z-1|+||x-\hat{x}||_C < \varepsilon$, будем иметь $u(t) \in U(x(t))$, и следовательно, $\int_\Delta |u-\hat{u}|\,dt \le 2K\delta$, поэтому, считая $\delta < \varepsilon/(2K)$, получаем, что для таких w_Δ автоматически выполнено (15.2), а тогда $J(w_\Delta) \geq J(\hat{w}_\Delta)$, и тем самым сильная минимальность w_Δ на малых отрезках установлена. Лемма доказана.

По аналогии с (15.1) введем теперь множество

$$E_+(\Psi_0(\hat{w}_\Delta)) = \bigcup_{a>0} E_a(\Psi_0(\hat{w}_\Delta)), \tag{15.3}$$

непустота которого, как уже отмечалось, зависит от выбора присоединенного базиса, и дадим следующее

Определение 15.4. Кривую $\hat{x}(t)$ будем называть *квадратично* $\Pi-$ *жесткой на малых отрезках в данном присоединенном базисе,* если существует $\delta > 0$ такое, что для любого отрезка $\Delta \subset [0,T]$ длины $|\Delta| \leq \delta$ множество $E_+(\Psi_0(\hat{w}_\Delta))$ непусто, т.е. существует $n-$ мерная липшицева функция $\psi(t)$, удовлетворяющая на Δ сопряженному уравнению (7.1), равенствам (7.2), (7.17), (11.8) и неравенству (7.18) при некотором $a = a(\Delta) > 0$.

Из леммы 15.2 и теоремы 14.1 вытекает

Теорема 15.4. Пусть траектория $\hat{w}$ системы (Ж), записанной в некотором присоединенном базисе, является квадратично $\Pi-$ жесткой на малых отрезках. Тогда для любой субметрики из пучка, определяемого этим базисом, она доставляет строгий глобальный минимум в задаче (Z_Δ) при малых Δ, т.е. является строго кратчайшей между своими концевыми точками на малых отрезках.

Для двумерного распределения эта теорема приобретает следующую формулировку. (Опять принимаем во внимание, что для двумерного $\Gamma(x)$ квадратичная $\Pi-$ жесткость эквивалентна "обычной"квадратичной жесткости, а последняя не зависит от выбора присоединенного базиса.)

Теорема 15.5. Пусть траектория $\hat{w}$ системы (Ж) является квадратично жесткой на малых отрезках. Тогда для любой субметрики на $\Gamma(x)$, имеющей опорную гиперплоскость в окрестности $\hat{x}(t)$, эта траектория доставляет строгий глобальный минимум расстояния на малых отрезках.

Эта теорема чуть сильнее теоремы 15.3 (но только для двумерного распределения), так как здесь не требуется строгости опорной гиперплоскости. Она вытекает также из теоремы 15.1 и леммы 15.2.

16 Примеры

Рассмотрим здесь несколько примеров.

Пример 1. Пусть распределение в $\mathbb{R}^3$ задано двумя векторными полями:

$$r_0(x) = b(x_1)\frac{\partial}{\partial x_2} + c(x_1)\frac{\partial}{\partial x_3} \qquad \text{и} \qquad r_1(x) = \frac{\partial}{\partial x_1},$$

где b и c – дважды гладкие функции скалярного аргумента, удовлетворяющие условиям:

$$b(0) = 1, \qquad c(0) = c'(0) = 0, \qquad c''(0) \neq 0. \tag{16.1}$$

Соответствующая управляемая система выглядит так:
$\dot{x} = u_0\, r_0(x) + u_1\, r_1(x)$, т.е.

$$\dot{x}_1 = u_1, \qquad \dot{x}_2 = b(x_1)\, u_0, \qquad \dot{x}_3 = c(x_1)\, u_0.$$

Будем исследовать траекторию $\hat{x}(t) = (0, t, 0)$, $\hat{u}(t) = (1, 0)$, $t \in [0, T]$, с произвольным фиксированным $T > 0$. Она соединяет точки $(0,0,0)$ и $(0, T, 0)$.

(Этот пример является обобщением примеров из [14, 13, 12]. Пример из [14] получается при $b \equiv 1,\ c = x_1^2$, пример из [13] – при $b = 1 - x_1,\ c = x_1^2$, а пример из [12] – при $c(x_1) = b(x_1)\, x_1^2$ с некоторой конкретной функцией b. Во всех этих работах рассматривалась субриманова метрика, в которой данный базис является ортонормированным.)

Базис r_0, r_1 является присоединенным для $\hat{x}(t)$, а соответствующая система (Ж) имеет вид:

$$\dot{x}_1 = u_1, \qquad \dot{x}_2 = z\, b(x_1), \qquad \dot{x}_3 = z\, c(x_1), \qquad \dot{z} = 0,$$

$$x(0) = (0,0,0), \qquad x(T) = (0, T, 0).$$

Управление в ней одномерно; $\hat{u}_1 = 0,\ \hat{z} = 1$. Здесь $H = \psi_1 u_1 + \psi_2 z b(x_1) + \psi_3 z c(x_1)$, и множество Ψ_0 по определению состоит из всех $3-$ мерных функций $\psi(t)$ с нормировкой $|\psi(0)| = 1$, удовлетворяющих сопряженной системе (7.1), т.е.

$$\dot{\psi}_1 = -\psi_2\, b'(0) - \psi_3\, c'(0), \qquad \dot{\psi}_2 = 0, \qquad \dot{\psi}_3 = 0,$$

и равенствам (7.2), т.е. $\psi_1 = 0, \qquad \psi_2 b(0) + \psi_3 c(0) = 0.$

С учетом (16.1) отсюда следует, что Ψ_0 состоит их двух постоянных векторов $\psi = \pm(0,0,1)$. Для каждого из них функция Лагранжа (7.10) есть

$$\Phi[\psi](z, x, u) = \psi_3 \left(x_3(0) - x_3(T) + \int_0^T (\dot{x}_3 - z c(x_1))\, dt \right),$$

а ее вторая вариация

$$\Omega\, [\psi](\bar{z}, \bar{x}, \bar{u}) = -\psi_3 \int_0^T c''(0)\, \bar{x}_1^2\, dt.$$

Подпространство критических вариаций задается линеаризацией всех ограничений системы (Ж). Среди полученных равенств будет присутствовать уравнение $\dot{\bar{x}}_1 = \bar{u}_1, \quad \bar{x}_1(0) = 0$. Так как гоховская переменная $\bar{y} = \bar{y}_1 \in \mathbb{R}^1$ удовлетворяет этому же уравнению: $\dot{\bar{y}}_1 = \bar{u}_1, \quad \bar{y}_1(0) = 0$, то $\bar{x}_1 = \bar{y}_1$, и, выбирая $\psi_3 = -\operatorname{sign} c''(0)$, получаем

$$\Omega\,[\psi](\bar{z}, \bar{x}, \bar{u}) \;\geq\; |c''(0)| \cdot \int_0^T |\bar{y}|^2\, dt,$$

откуда следует, что неравенство (7.20) выполнено.

Тогда по теореме 8.1 заключаем, что для любого T и для любой субметрики, имеющей строгую опорную гиперплоскость в окрестности $\hat{x}(t)$ (в частности, для любой субримановой метрики), траектория $\hat{x}(t)$ доставляет строгий сильный минимум, а любой ее достаточно малый отрезок доставляет строгий глобальный минимум расстояния между своими концевыми точками. Если же субметрика имеет нестрогую опорную гиперплоскость, то по теореме 15.1 траектория $\hat{w}$ доставляет строгий минимум относительно $||w||_1$, а любой ее достаточно малый отрезок по теореме 15.5 по-прежнему доставляет строгий глобальный минимум. (В работах [14, 13, 12] для соответствующих примеров установлена строгая глобальная минимальность только для малых отрезков и для субримановых метрик.)

Обратим внимание, что если $b'(0) = 0$, то траектория $\hat{x}$ может не быть особой для некоторых субметрик в соответствующих задачах (Z) и (S_1). Например, если в указанном базисе взять стандартную евклидову метрику $\varphi(x, u) = |u|$ (т.е. считать этот базис ортонормированным), то для не„ этот базис будет опорным (годограф $|u| \leq 1$ содержится в полупространстве $u_0 \leq 1$), и в соответствующей задаче (Z), или, что эквивалентно, в задаче (S_1), получающейся при добавлении к системе (Ж) функционала $J = z(0) \to \min$, для данной траектории принцип максимума будет выполнен также и с вектором $\psi = (0, 1, 0)$, не принадлежащим $\Psi_0(\hat{w})$, т.к. он не ортогонален $\Gamma(\hat{x})$ (для него $H(\hat{w}) = \psi_2\, \hat{z}\, b(0) = 1 > 0$). Однако, согласно теоремам 8.1, 15.1, 15.5, это обстоятельство никак не влияет на справедливость утверждений о минимальности $\hat{w}$.

Пример 2. В работе [13] доказательство минимальности некоторого класса анормальных траекторий сводится (с помощью некоторых специальных преобразований) к рассмотрению следующей системы, названной авторами "нормальной формой":

$$\dot{x}_1 = u\, a(x) + v\, x_1 b_1(x),$$

$$\dot{x}_2 = v\,(1 + x_1 b_2(x)),$$

$$\dot{x}_i = v\, x_1 b_i(x), \qquad i = 3, \ldots, n.$$

Исследуется траектория $\hat{u} \equiv 0, \; \hat{v} \equiv 1, \quad x(0) = (0, x_2^0, 0, \ldots, 0)$,
т.е. $\hat{x}(t) = (0, x_2^0 + t, 0, \ldots, 0)$.

Предполагается, что $b_3(x) = x_1\eta_1(x) + x_3\eta_3(x) + \ldots + x_n\eta_n(x)$, все функции $a,\, b_i,\, \eta_i$ гладкие, и $\eta_1(\hat{x}(t)) \neq 0 \quad \forall\, t$.

Из предположений относительно коэффициента b_3 следует, что

$$b_3(\hat{x}(t)) = 0, \qquad \frac{\partial b_3}{\partial x_1}\,(\hat{x}(t)) \neq 0 \qquad \forall\, t. \tag{16.2}$$

(По сути, они эквивалентны этим условиям.)

В работе [13] рассматривалась субриманова метрика с единичным шаром $u^2 + v^2 \leq 1$, и доказано, что достаточно малые отрезки данной траектории доставляют строгий глобальный минимум относительно этой субметрики.

В наших обозначениях здесь $u = u_1$, $v = u_0$, и базис, в котором записана система, является присоединенным для траектории $\hat{x}(t)$. Мы положим $a(x) \equiv 1$ (или, что то же самое, введем новое управление $u_1 = a(x)u$), зафиксируем любой отрезок [0,T], и покажем, что для данной траектории множество $G_+(\Psi_0)$ непусто, следовательно, она является квадратично жесткой на малых отрезках. Отсюда по теореме 15.5 будет следовать, что $\hat{x}$ доставляет строгий глобальный минимум на малых отрезках относительно любой субметрики, имеющей дважды гладкую опорную гиперплоскость в окрестности $\hat{x}(t)$, в частности, относительно любой субримановой метрики, причем не обязательно такой, в которой данный базис ортогонален.

Система (Ж) здесь имеет вид (делаем замену $v \mapsto z$):

$$\dot{x}_1 = u\, + z\, x_1 b_1(x),$$

$$\dot{x}_2 = z\,(1 + x_1 b_2(x)),$$

$$\dot{x}_i = z\, x_1 b_i(x), \qquad i = 3, \ldots, n.$$

Функция Понтрягина $H = u\,\psi_1 + z\,\psi_2 + z\,x_1\, \sum_{i=1}^{n} \psi_i b_i(x)$. Множество Ψ_0 состоит из всех $n-$ мерных функций $\psi(t)$ с нормировкой $|\psi(0)| = 1$, удовлетворяющих сопряженной системе (7.1):

$$\dot{\psi}_1 = \, -\sum_{i=1}^{n} \psi_i b_i(\hat{x}), \tag{16.3}$$

$$\dot{\psi}_2 = 0, \qquad \dot{\psi}_3 = 0, \quad i = 3, \ldots, n,$$

и условиям ортогональности (7.2):

$$u\,\psi_1 + v\,\psi_2 + v\,\hat{x}_1\, \sum_{i=1}^{n} \psi_i b_i(\hat{x}) = 0 \qquad \forall\, u,\, v;$$

откуда $\psi_1 = 0,\; \psi_2 = 0$.

Все множество Ψ_0 мы описывать не будем; укажем лишь два постоянных вектора, содержащихся в нем: $\psi = \theta\,(0,0,1,0,\ldots,0)$, где $\theta = \pm 1$ (при этом выполнение (16.3) обеспечивается равенством $b_3(\hat{x}) = 0$). Для каждого из этих ψ функция Лагранжа есть

$$\Phi[\psi](z, x, u) = \theta\left(x_3(0) - x_3(T) + \int_0^T (\dot{x}_3 - z\, x_1 b_3(x))\, dt\right),$$

а ее вторая вариация на траектории $\hat{x}(t)$

$$\Omega\,[\psi](\bar{z}, \bar{x}, \bar{u}) \;=\; -\theta \int_0^T \hat{z}\,\bar{x}_1\Big(\bar{x}_1\eta_1(\hat{x}) + \bar{x}_3\eta_3(\hat{x}) + \ldots + \bar{x}_n\eta_n(\hat{x})\Big)\, dt.$$

Подпространство критических вариаций задается равенствами

$$\dot{\bar{x}}_1 = \bar{u} + \bar{x}_1 b_1(\hat{x}), \qquad \dot{\bar{x}}_2 = \bar{z} + \bar{x}_1 b_2(\hat{x}),$$

$$\dot{\bar{x}}_i = \bar{x}_1 b_i(\hat{x}), \qquad i = 3, \ldots, n;$$

$$\bar{x}(0) = \bar{x}(T) = 0.$$

Переходя к переменным Гоха, т.е. полагая

$$\bar{x}_1 = \bar{\xi}_1 + \bar{y}, \qquad \dot{\bar{y}} = \bar{u}, \quad \bar{y}_0 = 0,$$

$$\bar{x}_2 = \bar{\xi}_2, \qquad \bar{x}_i = \bar{\xi}_i, \quad i = 3, \ldots, n,$$

получим в новых переменных:

$$\Omega\,[\psi](\bar{z}, \bar{\xi}, \bar{y}) \;=\; -\theta \int_0^T \left((\bar{\xi}_1 + \bar{y})^2\eta_1(\hat{x}) + (\bar{\xi}_1 + \bar{y})\sum_{i=3}^n \bar{\xi}_i\,\eta_i(\hat{x})\right) dt, \qquad (16.4)$$

где $\quad \dot{\bar{\xi}}_i = (\bar{\xi}_1 + \bar{y})\, b_i(\hat{x}), \qquad \bar{\xi}_i(0) = \bar{\xi}_i(T) = 0, \quad i = 1; \quad i = 3, \ldots, n. \qquad (16.5)$

Отсюда видно, что коэффициент $Q[\lambda] = \psi\,[[r_1, r_0], r_1]$ из (7.12), (7.16), стоящий при $\bar{y}^2$, равен $-\theta\eta_1(\hat{x}(t))$. Так как по условию $\eta_1(\hat{x}(t)) \neq 0$ (т.е. $\frac{\partial b_3}{\partial x_1}(\hat{x}(t)) \neq 0$), то выбирая $\theta = -\operatorname{sign}\eta_1(\hat{x})$, получаем, что неравенство (7.18) выполнено с некоторым $a > 0$, т.е. $\psi \in G_+(\Psi_0)$. (При этом, очевидно, $-\psi \notin G_+(\Psi_0)$.) Таким образом, множество $G_+(\Psi_0)$ для данной траектории действительно непусто, что и требовалось показать.

Более того, для функционала (16.4) при указанном θ можно найти точную грань тех T, для которых он будет положительно определен. Для этого, принимая $\bar{y}$ за новое управление, а $\bar{\xi}_i$, $i = 3, \ldots, n$ за новые фазовые переменные, получаем обычный квадратичный функционал КВИ, и надо найти его сопряженную точку. Впрочем, в данном случае можно считать новым управлением $\bar{x}_1$, т.к. $\bar{u}$ входит в функционал (16.4) и систему (16.5) только через $\bar{x}_1$. Можно показать, что $\int_0^T |\bar{x}_1|^2\, dt \;\simeq\; \int_0^T |\bar{y}|^2\, dt$ (см. оценку (9.11)), поэтому положительная определенность Ω относительно $||\bar{y}||_2^2$ совпадает с его положительной определенностью относительно $||\bar{x}_1||_2^2$.

Обозначим $\bar{x}_1 = \bar{v}$ и для краткости положим $\eta_i(\hat{x}(t)) = \eta_i(t),\ b_i(\hat{x}(t)) = b_i(t)$. Считая без нарушения общности, что $\eta_1(t) > 0$, получаем тогда:

$$\Omega = \int_0^T \Big(\bar{v}^2\eta_1(t) + \bar{v}\sum_{i=3}^{n} \bar{\xi}_i\,\eta_i(t)\Big)\,dt,$$

$$\text{где} \qquad \dot{\bar{\xi}}_i = b_i(t)\,\bar{v}, \qquad \bar{\xi}_i(0) = \bar{\xi}_i(T) = 0, \quad i = 3,\dots,n.$$

Сопряженная точка T_0 – это минимальное значение T, для которого на отрезке [0,T] существует ненулевая стационарная точка этого функционала, т.е. нетривиальное решение уравнения Эйлера-Лагранжа-Якоби для него. Выпишем это уравнение. Здесь

$$H = \sum_{i=3}^{n} \bar{\psi}_i b_i(t)\bar{v} - \eta_1(t)\bar{v}^2 - \bar{v}\sum_{i=3}^{n} \bar{\xi}_i\,\eta_i(t),$$

$$\dot{\bar{\psi}}_i \ = -H_{\bar{\xi}_i} = \ \bar{v}\eta_i(t),$$

$$H_{\bar{u}} = \sum \bar{\psi}_i b_i(t) - 2\eta_1(t)\bar{v} - \sum \bar{\xi}_i\,\eta_i(t) = 0,$$

откуда $\bar{v}$ выражается через $\bar{\psi}_i$ и $\bar{\xi}_i$:

$$\bar{v} = \frac{1}{2\,\eta_1(t)}\Big(\sum \bar{\psi}_i\beta_i(t) - \sum \bar{\xi}_i\,\eta_i(t)\Big).$$

С учетом этого выражения получаем замкнутую систему дифференциальных уравнений относительно $\bar{\xi}$ и $\bar{\psi}$:

$$\dot{\bar{\xi}}_i = b_i(t)\bar{v}, \qquad \dot{\bar{\psi}}_i = \eta_i(t)\bar{v}, \qquad i = 3,\dots,n. \tag{16.6}$$

Нас интересуют решения этой системы с начальными условиями

$$\bar{\xi}_i(0) = 0, \qquad i = 3,\dots,n. \tag{16.7}$$

Пусть $X(t),\, P(t)$ есть $(n-2)\times(n-2)$ -матрицы, столбцы которых представляют собой фундаментальную систему решений $(\bar{\xi},\bar{\psi})$ системы (16.6), (16.7). Тогда T_0 – это первое значение $t > 0$, при котором $\det X(t) = 0$.

Если $T < T_0$, то данное Ω (т.е. функционал (16.4) при $\theta = -1$) является положительно определенным, поэтому условие (7.21) выполнено, следовательно, данная траектория является квадратично жесткой и по теореме 8.1 она доставляет строгий сильный минимум для любой субметрики, имеющей строгую опорную гиперплоскость в окрестности $\hat{x}(t)$, а для любой субметрики, имеющей просто опорную гиперплоскость, по теореме 15.1 она доставляет строгий $\Pi-$ минимум.

Если $T \ge T_0$, то функционал (16.4) не является положительно определенным. Тем не менее условие (7.21) может выполняться, ибо в нем участвует максимум $\Omega[\psi]$ по всем $\psi \in G_+(\Psi_0)$. Например, если условиям (16.2) удовлетворяет не только функция $b_3(x)$, но и $b_4(x)$, то по аналогии с предыдущим множество Ψ_0 содержит также два постоянных вектора $\psi = \theta\,(0,0,0,1,0,\dots,0)$, $\theta = \pm 1$, поэтому при $\theta = -\mathrm{sign}\,\frac{\partial b_4}{\partial x_1}\,(\hat{x}(t))$ опять получим $\psi \in G_+(\Psi_0)$, и для соответствующей квадратичной формы можно найти сопряженную точку T_0'. Тогда условие (7.21) гарантированно выполнено при всех $T < \max(T_0, T_0')$. Однако и это может не быть точной границей тех T, для которых оно выполняется. Для того, чтобы определить эту границу, надо описать все множество $G_+(\Psi_0)$ и найти "сопряженную точку"для функционала (7.21). Теория Якоби для функционалов такого типа изложена в [6].

Пример 3 принадлежит А.А.Милютину. В пространстве $\mathbb{R}^5$ с координатами $x = (x_0, x_1, x_2, x_3, x_4)$ рассмотрим трехмерное распределение $\Gamma(x)$, порожденное векторными полями $r_0(x) = e_0$, $r_1(x) = A_1 x$, $r_2(x) = A_2 x$, где $e_0 = (1,0,0,0,0)$ – базисный вектор, а матрицы A_1, A_2 действуют следующим образом:

$$A_1 x = (0,\, x_0 + x_3,\, 0,\, x_1 + x_3,\, x_4)', \qquad A_2 x = (0,\, 0,\, x_0,\, x_3,\, x_2 + x_4)'$$

(здесь штрих означает переход от вектора-строки к вектору-столбцу), или, пользуясь обозначением векторных полей в виде дифференциальных операторов:

$$r_0(x) = \tfrac{\partial}{\partial x_0} \quad \text{(постоянное поле)}\ ,$$
$$r_1(x) = (x_0 + x_3)\tfrac{\partial}{\partial x_1} + (x_1 + x_3)\tfrac{\partial}{\partial x_3} + x_4\tfrac{\partial}{\partial x_4},$$
$$r_2(x) = x_0\tfrac{\partial}{\partial x_2} + x_3\tfrac{\partial}{\partial x_3} + (x_2 + x_4)\tfrac{\partial}{\partial x_4}.$$

(Нетрудно проверить, что $\forall\, x \quad \Gamma^3(x) = \mathbb{R}^5$, следовательно, Γ является скобочно порождающим, хотя размерности $\Gamma(x)$ и $\Gamma^2(x)$ могут быть разными в разных точках.) Этому распределению соответствует управляемая система
$\dot{x} = u_0 e_0 + u_1 A_1 x + u_2 A_2 x$.

Рассмотрим траекторию $\hat{x}_0 = t$, $\hat{x}_1 = \hat{x}_2 = 0$, $\hat{x}_3 = 1$, $\hat{x}_4 = -1$ на некотором отрезке $[t_0, T]$. Она соединяет точки $x(t_0) = (t_0, 0, 0, 1, -1)$ и $x(T) = (T, 0, 0, 1, -1)$. Вдоль этой траектории $\forall\, t \quad \dim \Gamma(\hat{x}(t)) = 3$, $\dim \Gamma^2(\hat{x}(t)) = 4$. Данный базис является, очевидно, присоединенным, а соответствующая система (Ж) имеет вид: $\dot{x} = z\,e_0 + u_1 A x_1 + u_2 A_2 x$, $\dot{z} = 0$, т.е.

$$\dot{x}_0 = z, \qquad \dot{z} = 0,$$
$$\dot{x}_1 = u_1(x_0 + x_3), \qquad \dot{x}_2 = u_2\, x_0,$$
$$\dot{x}_3 = u_1(x_1 + x_3) + u_2 x_3,$$
$$\dot{x}_4 = u_1 x_4 + u_2(x_2 + x_4).$$

Управление в ней уже двумерно. Найдем множество $\Psi_0(\hat w)$.
Здесь функция Понтрягина $\quad H = z\psi_0 + u_1(\psi, A_1x) + u_2(\psi, A_2x) =$
$= \psi_0 z + \psi_1 u_1(x_0+x_3) + \psi_2 u_2 x_0 + \psi_3 u_1(x_1+x_3) + \psi_3 u_2 x_3 + \psi_4 u_1 x_4 + \psi_4 u_2(x_2+x_4).$

Сопряженная система имеет вид: $\dot\psi = -\hat u_1\psi A_1 - \hat u_2\psi A_2 = 0$, т.е. $\psi = \mathrm{const}$, а условие $\psi \perp \Gamma(\hat x(t))$ означает: $\psi_0 = 0$,

$$H_{u_1} = \psi A_1\hat x = \psi_1(\hat x_0+\hat x_3) + \psi_3(\hat x_1+\hat x_3) + \psi_4\hat x_4 = 0,$$
$$H_{u_2} = \psi A_2\hat x = \psi_2\hat x_0 + \psi_3\hat x_3 + \psi_4(\hat x_2+\hat x_4) = 0.$$

Для данной траектории последние два равенства означают, что $\forall\, t$

$$\psi_1(t+1) + \psi_3 - \psi_4 = 0, \qquad \psi_2\, t + \psi_3 - \psi_4 = 0,$$

откуда $\psi_1 = \psi_2 = 0$, $\psi_3 = \psi_4$. Таким образом, с точностью до нормировки множество Ψ_0 состоит из двух постоянных векторов $\psi = \theta\,(0,0,0,1,1)$, $\theta = \pm 1$. Для каждого из них функция Лагранжа имеет вид

$$\Phi[\psi](z,x,u) = \theta\Big(x_3(t_0) - x_3(T) + x_4(t_0) - x_4(T) +$$
$$+ \int_{t_0}^{T} (\dot x_3 + \dot x_4)\,dt - \int_{t_0}^{T} \left(u_1(x_1+x_3) + u_2x_3 + u_1x_4 + u_2(x_2+x_4)\right)\,dt\Big),$$

а ее вторая вариация на траектории $\hat w(t)$ есть

$$\Omega\,[\psi](\bar z,\bar x,\bar u) = -\theta \int_{t_0}^{T} \Big(\bar u_1(\bar x_1+\bar x_3+\bar x_4) + \bar u_2(\bar x_2+\bar x_3+\bar x_4)\Big)\,dt.$$

Подпространство критических вариаций задается равенствами

$$\dot{\bar x}_0 = \bar z, \qquad \dot{\bar z} = 0,$$
$$\dot{\bar x}_1 = \bar u_1\,(t+1), \qquad \dot{\bar x}_2 = \bar u_2\, t,$$
$$\dot{\bar x}_3 = \bar u_1 + \bar u_2, \qquad \dot{\bar x}_4 = -\bar u_1 - \bar u_2,$$
$$\bar x(t_0) = \bar x(T) = 0.$$

Сделаем преобразование Гоха, т.е. положим

$$\dot{\bar y}_1 = \bar u_1, \quad \dot{\bar y}_2 = \bar u_2, \quad \bar y_1(t_0) = \bar y_2(t_0) = 0,$$
$$\bar z = \bar\xi_z, \qquad \bar x_0 = \bar\xi_0,$$
$$\bar x_1 = \bar\xi_1 + \bar y_1(t+1), \qquad \bar x_2 = \bar\xi_2 + \bar y_2 t,$$
$$\bar x_3 = \bar\xi_3 + \bar y_1 + \bar y_2, \qquad \bar x_4 = \bar\xi_4 - \bar y_1 - \bar y_2.$$

Тогда $\bar\xi$ подчиняется уравнению

$$\dot{\bar\xi} = \bar z\, e_0 - \bar y\, e_1 - \bar y_2\, e_2, \qquad \bar\xi(t_0) = 0.$$

Заметим, что при этом $\bar\xi_3 = \bar\xi_4 = 0$, и $\bar x_3 + \bar x_4 = 0$.

В новых переменных получаем:

$$\Omega = -\theta \int_{t_0}^{T} \Big(\bar u_1(\bar\xi_1 + (t+1)\bar y_1) \ + \ \bar u_2(\bar\xi_2 + t\bar y_2) \Big)\, dt,$$

$$\left.\begin{aligned} \dot{\bar\xi}_1 &= -\bar y_1, \qquad & \bar\xi_1(t_0) &= 0, \\ \dot{\bar\xi}_2 &= -\bar y_2, \qquad & \bar\xi_2(t_0) &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{16.8}$$

На правом конце должны выполняться равенства:

$$\begin{aligned} \bar x_1(T) &= \ \bar\xi_1(T) + (T+1)\, \bar y_1(T) = 0, \\ \bar x_2(T) &= \ \bar\xi_2(T) + T\, \bar y_2(T) = 0, \\ \bar x_3(T) &= \ \bar y_1(T) + \bar y_2(T) = 0. \end{aligned}$$

Если положить $\bar y_1(T) = \beta$, то из последнего равенства получим $\bar y_2(T) = -\beta$, а предыдущие два равенства означают:

$$\bar\xi_1(T) = -(T+1)\beta, \qquad \bar\xi_2(T) = T\beta. \tag{16.9}$$

Интегрируя по частям, получаем тогда:

$$-\theta\, \Omega \ = \ \Big(\bar y_1 \bar\xi_1 + \bar y_2 \bar\xi_2\Big)\Big|_T \ + \ \Big(\tfrac{t+1}{2}\, \bar y_1^2 \ + \ \tfrac{t}{2}\, \bar y_2^2\Big)\Big|_T \ - \int_{t_0}^{T} (-\bar y_1^2 + \frac{\bar y_1^2}{2} - \bar y_2^2 + \frac{\bar y_2^2}{2})\, dt \ =$$

$$= \ -\tfrac{T+1}{2}\, \bar y_1^2(T) \ - \ \tfrac{T}{2}\, \bar y_2^2(T) \ + \ \tfrac{1}{2} \int_{t_0}^{T} (\bar y_1^2 + \bar y_2^2)\, dt.$$

Таким образом, для $\theta = -1$ имеем:

$$2\,\Omega = \ -(2T+1)\,\beta^2 + \int_{t_0}^{T} (\bar y_1^2 + \bar y_1^2)\, dt, \tag{16.10}$$

причем, согласно (16.9),

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{T} \bar y_1\, dt &= -\bar\xi_1(T) = -(T+1)\,\beta, \\ \int_{t_0}^{T} \bar y_2\, dt &= -\bar\xi_2(T) = \ T\beta. \end{aligned} \tag{16.11}$$

Здесь уже можно считать $\bar y_i \in L_2$ и рассматривать их как новые управления, а $\bar\xi_i$ – как новые фазовые переменные, которые в момент T связаны соотношениями (16.11). Отсюда видно, что у данной квадратичной формы коэффициент при $\bar y^2$ есть $Q = I$ (единичная 2×2 -матрица), поэтому данное $\psi \in G_{\frac{1}{2}}(\Psi_0)$, а при $\theta = +1$ матрица $Q = -I$, и ψ не удовлетворяет условию (7.18) даже с $a = 0$.

Таким образом, множество $G_+(\Psi_0)$ состоит из единственного постоянного вектора $\psi = -(0,0,0,1,1)$, которому соответствует квадратичная форма (16.10) со связями (16.8) и (16.11). Поэтому выполнение неравенства (7.21) эквивалентно его выполнению для квадратичной формы (16.10).

Установим, при каких t_0, T эта квадратичная форма удовлетворяет (7.21) при некотором $a > 0$, т.е. является положительно определенной. Как известно из КВИ, для этого надо найти ее сопряженную точку. Зафиксировав момент T, надо двигать t_0 (именно t_0, а не T, ибо $\bar{\xi}(t_0) = 0$), и найти максимальное значение t_0, при котором $\Omega(\bar{y}) \le 0$ для некоторой ненулевой функции $\bar{y}$. (Так как у нас выполнено усиленное условие Лежандра относительно нового управления: $Q > 0$, то при t_0, близких к T, всегда будет $\Omega(\bar{y}) > 0$.) Это можно сделать, например, так: заметив, что при фиксированном β функционал Ω распадается на сумму функционалов от $\bar{y}_1$ и $\bar{y}_2$, найти минимум Ω независимо по $\bar{y}_1$ и по $\bar{y}_2$. Тем самым мы найдем $\min \Omega$ при данном β. Легко видеть, что здесь будет

$$\bar{y}_1 = \text{const} = \frac{T+1}{\Delta}\,\beta, \qquad \bar{y}_2 = \text{const} = -\frac{T}{\Delta}\,\beta,$$

где $\Delta = T - t_0$, и тогда при данном β

$$\min\,\Omega = -(2T+1)\,\beta^2 + \frac{(T+1)^2}{\Delta}\,\beta^2 + \frac{T^2}{\Delta}\,\beta^2.$$

(Получилось, естественно, однородное выражение по β.)

Отсюда видно, что Ω будет положительно определенной тогда и только тогда, когда $(2T+1) < (2T^2+2T+1)/\Delta$. Поэтому, если $2T+1 \le 0$, т.е. $T \le -\frac{1}{2}$, то годится любое $\Delta > 0$, т.е. при любом $t_0 < T$ данный отрезок траектории будет квадратично жестким, и следовательно, по теореме 8.1 будет доставлять строгий сильный минимум для любой субметрики, имеющей строгую опорную гиперплоскость в окрестности $\hat{x}(t)$. Если же $2T+1 > 0$, т.е. $T > -\frac{1}{2}$, то только при $\Delta < \frac{2T^2+2T+1}{2T+1}$ данный отрезок траектории будет квадратично жестким и, соответственно, строгим сильным минимумом. При $\Delta > \frac{2T^2+2T+1}{2T+1}$, т.е. при достаточно далеких отрицательных t_0, получаем $\Omega < 0$ (при некоторых $\bar{y}$), и тем самым, согласно [17], нарушается квадратичное *необходимое* условие жесткости, поэтому данный отрезок траектории не является жестким. Что же касается его минимальности, то, имея в своем распоряжении пока лишь достаточные условия, здесь мы ничего не можем утверждать.

Любопытно отметить, что точка $T_* = -\frac{1}{2}$, играющая в этом примере некую "критическую"роль, априори ничем не выделяется на исследуемой траектории.

17 Приложение

Приложение А.

Доказательство леммы 2.1. Интуитивно справедливость этой леммы совершенно очевидна, однако формальное доказательство требует не совсем тривиальных построений. Рассмотрим здесь случай нестрогих минимумов.

Ясно, что достаточно доказать прямую импликацию, т.е. из наличия сильного минимума в задаче (Z) получить минимум в "геометрическом смысле". (Обратная импликация очевидна.)

С самого начала ограничимся рассмотрением достаточно малой окрестности $\mathcal{O}(\hat{\chi})$ множества $\hat{\chi}$. Рассмотрим годограф данной субметрики $F(x) = \{\,\bar{x} \in \Gamma(x)\,|\,q(x,\bar{x}) \le 1\}$ и отображение $p(x):\, \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n, \quad u \mapsto \sum u_i r_i(x)$, при котором $p(x)\,\mathbb{R}^k = \Gamma(x)$, и $p(x)\,U(x) = F(x)$.

Согласно предположению A2, на множестве $\mathcal{O}(\hat{\chi})$ имеется гладкая гиперплоскость $\Gamma_0(x)$ в $\Gamma(x)$, опорная к годографу $F(x)$ в точке $r_0(x)$. Расширим ее до гладкой гиперплоскости $H(x)$ во вс„м пространстве $\mathbb{R}^n$ таким образом, что $H(x) \bigcap \Gamma(x) = \Gamma_0(x)$ и $r_0(x) \notin H(x)$. Сделав гладкую замену координат в $\mathcal{O}(\hat{\chi})$, можно считать, что вектор $r_0(x) = (1,0,\ldots,0)$, гиперплоскость $H(x)$ постоянна и задается равенством $x_1 = 0$, множество $F(x)$ содержится в полупространстве $x_1 \le 1$, а траектория $\hat{w}(t)$ имеет вид: $\hat{z} = 1$, $\hat{x}(t) = (t,0,\ldots,0)$, $\hat{u}(t) = (1,0,\ldots,0)$.

Предположим, что эта траектория доставляет сильный минимум в задаче (Z). Это означает по определению, что выполняется следующее *свойство A:* если w_m – последовательность допустимых траекторий, и $|z_m - 1| + ||x_m - \hat{x}||_C \to 0$, то $z_m \ge 1$ при всех достаточно больших m. В силу специфики задачи (Z) отсюда вытекает следующее (формально более сильное) *свойство B:* если допустимые траектории w_m таковы, что $||x_m - \hat{x}||_C \to 0$, то $z_m \ge 1$ при всех достаточно больших m.

Действительно, предположим, что для некоторой последовательности $z_m < 1$. Если при этом $z_m \to 1$, то по свойству A получаем $z_m \ge 1$, что противоречит условию $z_m < 1$. Если же на некоторой последовательности $z_m \le \mathrm{const} < 1$, то найд„тся такая последовательность $\beta_m \ge 1$, что $z'_m = \beta_m z_m \to 1-0$. Положим $u'_m = u_m/\beta_m$. Так как $\beta_m \ge 1$, то по-прежнему $u'_m(t) \in U(x_m(t))$. Тогда траектория $w'_m = (z'_m, x_m, u'_m)$ с тем же x_m будет допустима, но для не„, как мы только что установили, получается противоречие: $z'_m < 1$ и одновременно $z'_m \ge 1$. Итак, свойство B доказано.

Для каждой кривой $x(t)$, $t \in [0,T]$ положим $\delta(x) = \max \mathrm{dist}\,(x(t),\, \hat{\chi})$. Нам надо доказать, что если $\delta(x_m) \to 0$, то $z_m \ge 1$ при больших m. (Вс„ время речь ид„т о допустимых траекториях задачи (Z).) Допустим противное: существует последовательность, которая приближается к $\hat{\chi}$, т.е. $\delta(x_m) \to 0$, но $z_m < 1$.

Покажем, что тогда $||x_m - \hat{x}||_C \to 0$, и тем самым получим противоречие со свойством B. Для этого достаточно доказать

Лемму A.1. Пусть $\delta(x_m) \to 0$, $z_m \le 1 + o(1)$. Тогда $||x_m - \hat{x}||_C \to 0$.

Доказательство. Пусть π есть проекция $\mathbb{R}^n$ на координату x^1 : $\pi(x) = x^1$ (номер координаты здесь пишем вверху, т.к. нижний индекс указывает номер члена последовательности). Положим $s_m(t) = \pi\,(x_m(t)) = x_m^1(t)$. Так как $\delta(x_m) \to 0$, то $x_m(t)$ равномерно близко к $\hat{x}\,(s_m(t)) = (s_m(t), 0, \ldots, 0) = (x_m^1(t), 0, \ldots, 0)$. Так как $\dot{x}_m \in z_m\, F(x_m(t))$, и $z_m \le 1 + o(1)$, а множество $F(x_m(t))$ содержится в полупространстве $x_1 \le 1$, то

$$\dot{s}_m(t) = \dot{x}_m^1(t) \;\le\; 1 + \alpha_m, \qquad \text{где } \alpha_m \to 0.$$

При этом в силу концевых условий $x_m(0) = \hat{x}(0)$, $x_m(T) = \hat{x}(T)$ имеем $s_m(0) = 0$, $s_m(T) = T$. Покажем, что $||s_m(t) - t||_C \to 0$. Тогда $\hat{x}(s_m(t))$ будет равномерно близко к $\hat{x}(t)$ (в силу своей липшицевости), а так как $x_m(t)$ равномерно близко к $\hat{x}(s_m(t))$, то $x_m(t)$ будет равномерно близко к $\hat{x}(t)$, и тем самым лемма A.1 будет доказана. (Обратим внимание, что кривая $\hat{x}(s_m(t))$ не является, вообще говоря, допустимой; она служит лишь промежуточным пунктом для оценки расстояния между $x_m(t)$ и $\hat{x}(t)$.)

Итак, вс,, дело свелось к доказательству следующего свойства функций одного переменного.

Лемма A.2. Пусть абсолютно непрерывные (у нас – липшицевы) функции $s_m : [0, T] \to \mathbb{R}$ таковы, что $s_m(0) = 0$, $s_m(T) = T$, и почти всюду $\dot{s}_m(t) \le 1 + \alpha_m$, где $\alpha_m \to 0$. Тогда $||\, s_m(t) - t\,||_C \to 0$.

Доказательство. Сделав замену $v_m(t) = s_m(t) - t$, имеем $v_m(0) = 0$, $v_m(T) = 0$, почти всюду $\dot{v}_m(t) \le \alpha_m \to 0$, и надо доказать, что $||v_m||_C \to 0$.

Из наличия верхней оценки для $\dot{v}_m(t)$ очевидно следует, что достаточно доказать сходимость $v_m(t_*) \to 0$ при каждом t_*. Поскольку всегда

$$v_m(t_*) = \int_0^{t_*} \dot{v}_m(t)\, dt \;\le\; \alpha_m\, t_* \to 0,$$

то, если сходимости к нулю нет, имеем $\underline{\lim}\, v_m(t_*) < 0$, или, переходя к подпоследовательности, $v_m(t_*) \le -h < 0$. Но так как и на отрезке $[t_*, T]$

$$v_m(T) - v_m(t_*) \;\le\; \int_{t_*}^{T} \alpha_m\, dt \to 0,$$

то в сумме с предыдущим неравенством получим $v_m(T) \le -h + o(1) < 0$, что противоречит условию $v_m(T) = 0$. Лемма A.2 доказана, а вместе с ней доказана и лемма A.1, и следовательно, доказана лемма 2.1 для нестрогих минимумов.

Теперь нетрудно доказать е,, и для строгих минимумов. Мы оставляем это читателю.

Приложение В.

Пусть $\mathcal{X}$ есть произвольный метрический компакт, и $\varphi : \mathcal{X} \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция, которая $\forall\, x \in \mathcal{X}$ является положительной сублинейной функцией по $u \in \mathbb{R}^k$.

Лемма В.1. Для каждого $x \in \mathcal{X}$ множество $U(x) = \{u \,|\, \varphi(x,u) \le 1\}$ есть телесный компакт, непрерывно по Хаусдорфу зависящий от x.

Доказательство. Замкнутость $U(x)$ вытекает из непрерывности φ по u, а ограниченность – из сублинейности и положительности φ по u, поэтому компактность $U(x)$ доказана. Так как $\varphi(x,0) = 0$, и φ непрерывна по u, то $0 \in \operatorname{int} U(x)$. (Это вс„ хорошо известные факты выпуклого анализа.)

Пусть теперь $x_n \to x_0$. Надо доказать, что $U(x_n) \to U(x_0)$ по Хаусдорфу. Для компактных множеств это означает выполнение следующих двух свойств: а) если $u_n \in U(x_n)$, $u_n \to u_0$, то $u_0 \in U(x_0)$, и б) если $u_0 \in U(x_0)$, то существуют $u_n \in U(x_n)$, такие что $u_n \to u_0$.

В случае а) $u_n \in U(x_n)$ означает $\varphi(x_n, u_n) \le 1$, и тогда в силу непрерывности φ в пределе получаем $\varphi(x_0, u_0) \le 1$, т.е. действительно $u_0 \in U(x_0)$.

В случае б) имеем $\varphi(x_0, u_0) \le 1$, следовательно, $\varphi(x_n, u_0) \le \alpha_n \to 1$, откуда в силу сублинейности φ получаем $\varphi(x_n, \frac{u_0}{\alpha_n}) \le 1$, т.е. $u_n = \frac{u_0}{\alpha_n} \in U(x_n)$, и при этом $u_n \to u_0$, ч.т.д.

Лемма В.2. Пусть $U(x)$ есть семейство компактов в $\mathbb{R}^k$, непрерывно по Хаусдорфу зависящих от параметра x из некоторого компакта $\mathcal{X}$. Тогда их объединение $U' = \bigcup_x U(x)$ также есть компакт.

Доказательство. Из непрерывности $U(x)$ очевидно следует, что функция $|U(x)| = \max\{\, |u| : \;u \in U(x)\,\}$ непрерывна, поэтому на компакте $\mathcal{X}$ она ограничена сверху некоторым числом ρ. Это означает, что каждое $U(x)$ содержится в шаре радиуса ρ, поэтому и множество U' содержится в этом шаре, т.е. ограничено. Докажем его замкнутость. Пусть $u_n \in U'$, $u_n \to u_0$. Тогда $u_n \in U(x_n)$ при некоторых $x_n \in \mathcal{X}$. В силу компактности $\mathcal{X}$ для некоторой подпоследовательности имеем $x_{n_m} \to x_0 \in \mathcal{X}$. Но тогда в силу непрерывности $U(x)$ получаем $u_0 = \lim u_{n_m} \in U(x_0)$, поэтому $u_0 \in U'$, ч.т.д.

Лемма В.3. Пусть в условиях предыдущей леммы все компакты $U(x)$ выпуклы, и пусть точка $\hat{u} \in \mathbb{R}^k$ такова, что $\forall\, x \in \mathcal{X}$ она является единственной точкой максимума линейной функции $l(u) = u_0$ на $U(x)$. Тогда существует выпуклый телесный компакт $\tilde{U}$, содержащий все $U(x)$, $x \in \mathcal{X}$, для которого $\hat{u}$ также является единственной точкой максимума функции $l(u)$ на $\tilde{U}$.

Доказательство. Всегда можно считать, что хотя бы один из компактов $U(x)$ телесный. (Если это не так, то добавим к данному семейству выпуклую оболочку любого телесного компакта в полупространстве $l(u) < l(\hat{u})$ и точки $\hat{u}$.)

Положим $U' = \bigcup_x U(x)$. По лемме B.2 это компакт, причем, очевидно, телесный. Ясно, что для него $\hat{u}$ по-прежнему является единственной точкой максимума функции $l(u)$. Возьм„м его выпуклую оболочку $\tilde{U} = \operatorname{co} U'$. Как известно, это также компакт. Покажем, что и для него $\hat{u}$ является единственной точкой максимума $l(u)$. Действительно, предположим, что существует $u \in \tilde{U}$, $u \neq \hat{u}$, для которой $l(u) \geq l(\hat{u})$. Тогда по определению $u = \sum_{i=1}^m \alpha_i u_i'$, где все $u_i' \in U'$, $\alpha_i > 0$, и $\sum \alpha_i = 1$. Так как при этом $\forall\, i\;\; l(u_i') \leq l(\hat{u})$, то неравенство $l(u) \geq l(\hat{u})$ может выполняться только в случае, когда $\forall\, i\;\; l(u_i') = l(\hat{u})$, т.е. когда все $u_i' = \hat{u}$. Но тогда и их выпуклая комбинация $u = \hat{u}$, что противоречит предположению $u \neq \hat{u}$. Лемма доказана.

В ситуации нашего §4 в качестве компакта $\mathcal{X}$ можно взять замыкание любой достаточно малой окрестности множества $\hat{\chi}$.

Приложение C.

Доказательство формулы (7.11). Из (7.10) непосредственно следует выражение Ω в исходных переменных:

$$\Omega[\psi](\bar{z},\bar{x},\bar{u}) = -\int_0^T \Big(\bar{z}\,\psi(r_0'\,\bar{x}) + \frac{1}{2}\,\psi(r_0''\,\bar{x},\bar{x}) + \sum_{i=1}^{k-1} \bar{u}_i\,\psi(r_i'\,\bar{x})\Big)dt. \tag{17.1}$$

Подставляя сюда $\bar{x} = \bar{\xi} + \sum \bar{y}_j\, r_j(\hat{x})$ и раскрывая скобки, получаем в новых переменных:

$$\Omega[\psi](\bar{z},\bar{\xi},\bar{y},\bar{u}) = -\int_0^T \Big(\bar{z}\,\psi(r_0'\bar{\xi}) + \bar{z}\sum \bar{y}_j\,\psi(r_0'\,r_j) + \frac{1}{2}\,\psi(r_0''\,\bar{\xi},\bar{\xi}) + \tag{17.2}$$

$$+\sum \bar{y}_j\,\psi(r_0''\,\bar{\xi},r_j) + \frac{1}{2}\sum_{ij} \bar{y}_i\bar{y}_j\,\psi(r_0''\,r_i,r_j) + \sum \bar{u}_i\,\psi(r_i'\,\bar{\xi}) + \sum_{ij} \bar{u}_i\bar{y}_j\,\psi(r_i'\,r_j)\Big)dt.$$

Попытаемся теперь преобразовать два последних члена с тем, чтобы по возможности исключить $\bar{u}_i$. Для этого мы проинтегрируем их по частям, учитывая, что $\bar{u}_i dt = d\bar{y}_i$. Заметим сначала, что для любой симметричной абсолютно непрерывной матрицы $S(t)$ справедливо равенство $(S\bar{y},\bar{y})^{\boldsymbol{\cdot}} = (\dot{S}\bar{y},\bar{y}) + 2(S\bar{y},\bar{u})$, поэтому

$$\int_0^T (S(t)\bar{y},\bar{u})\,dt = \frac{1}{2}\,(S\bar{y},\bar{y})\Big|_T - \frac{1}{2}\int_0^T (\dot{S}(t)\bar{y},\bar{y})\,dt.$$

Для произвольной абсолютно непрерывной матрицы $C(t)$ имеем $C = S + V$, где $S = \frac{1}{2}\,(C + C^*)$ – е„ симметричная, а $V = \frac{1}{2}\,(C - C^*)$ – кососимметричная части. При этом $(S\bar{y},\bar{y}) = (C\bar{y},\bar{y})$, следовательно,

$$\int_0^T (C(t)\bar{y},\bar{u})\,dt = \frac{1}{2}\,(C\bar{y},\bar{y})\Big|_T - \frac{1}{2}\int_0^T (\dot{C}\bar{y},\bar{y})\,dt + \frac{1}{2}\int_0^T ((C - C^*)\bar{y},\bar{u})\,dt.$$

Тогда последний член в (17.2) можно записать в виде

$$-\int_0^T \sum_{ij} \bar u_i \bar y_j\, \psi(r_i' r_j)\, dt = -\frac{1}{2}\, \psi(r_i' r_j)\, \bar y_i \bar y_j \Big|_T +$$

$$+\int_0^T \frac{1}{2} \sum \Big(\psi\,(r_i' r_j)\Big)^{\cdot}\, \bar y_i \bar y_j\, dt - \int_0^T \frac{1}{2} \sum \psi(r_i' r_j - r_j' r_i)\, \bar u_i \bar y_j\, dt.$$

Раскрывая здесь в среднем члене полную производную по t по формуле

$$\frac{d}{dt}\, \varphi(x)\Big|_{\hat x(t)} = \varphi'(\hat x)\, \frac{d\hat x}{dt} = \varphi'(\hat x)\, r_0(\hat x),$$

и пользуясь скобками Ли: $[f,g] = f'g - g'f$, получаем выражение для последнего члена в (17.2):

$$-\frac{1}{2}\, \psi\,(r_i' r_j)\, \bar y_i \bar y_j \Big|_T + \int_0^T \frac{1}{2} \sum \psi\,(-r_0' r_i' r_j + r_i'' r_0 r_j + r_i' r_j' r_0)\, \bar y_i \bar y_j\ dt - \tag{17.3}$$

$$-\int_0^T \frac{1}{2} \sum \psi\,[r_i, r_j]\, \bar u_i \bar y_j\, dt$$

Теперь проинтегрируем по частям предпоследний член в (17.2), учитывая уравнение (7.8) на $\bar\xi$:

$$\int_0^T -\sum \bar u_i\ \psi(r_i'\,\bar\xi)\, dt = -\sum \bar y_i\, \psi(r_i'\,\bar\xi)\Big|_T -$$

$$-\int \sum \bar y_i\, \psi(r_0' r_i'\,\bar\xi)\, dt\ +\ \int \sum \bar y_i\, \psi(r_i''\, r_0, \bar\xi)\, dt +$$

$$+\int \sum_i \bar y_i\, \psi r_i'\,(\bar z\, r_0 + r_0'\,\bar\xi + \sum_j \bar y_j\,[r_0, r_j])\, dt\ . \tag{17.4}$$

Собер„м теперь подобные члены в (17.2)–(17.4).
Члены типа $\bar z\,\bar y$ имеются в (17.2) и (17.4):

$$\int \sum_i \Big(-\bar z\,\bar y_i\, \psi(r_0' r_i) + \bar z\,\bar y_i\, \psi(r_i' r_0)\Big) dt = \int \sum_i \bar z\,\bar y_i\, \psi\,[r_i, r_0]\, dt. \tag{17.5}$$

Но нетрудно заметить, что вдоль $\hat x(t)$

$$\psi\,[r_i, r_0] = -\frac{d}{dt}\,(\psi, r_i) = 0, \qquad \text{ибо в силу ПМ} \quad \psi\, r_i(\hat x) = 0, \tag{17.6}$$

поэтому член (17.5) исчезает.

Члены типа $\bar z\,\bar\xi$ и $\bar\xi\,\bar\xi$ присутствуют только в (17.2); они есть

$$\int \Big(-\bar z\, \psi(r_0'\,\bar\xi) - \frac{1}{2}\, \psi\,(r_0''\,\bar\xi, \bar\xi)\Big) dt. \tag{17.7}$$

Члены типа $\bar\xi\,\bar y$ имеются в (17.2) и (17.4) и в сумме дают

$$\int\sum_i\Big(-\bar y_i\,\psi(r_0''\,\bar\xi,r_i)-\bar y_i\,\psi(r_0'r_i'\,\bar\xi)+\bar y_i\,\psi(r_i''\,r_0,\bar\xi)+\bar y_i\,\psi(r_i'r_0'\,\bar\xi)\Big)dt. \tag{17.8}$$

Так как у каждой компоненты каждого векторного поля $r_i(x)$ матрица вторых производных симметрична, то $\forall\,\bar\xi,\bar\eta\in\mathbb{R}^n\quad(r_i''\,\bar\xi,\bar\eta)=(r_i''\,\bar\eta,\bar\xi)$, поэтому в третьем члене полученного равенства можно поменять местами r_0 и $\bar\xi$, и тогда, заметив, что

$$\frac{d}{dx}\,[r_i,r_0]\,\bar\xi=\frac{d}{dx}\Big((r_i'r_0-r_0'r_i)\,\bar\xi\Big)=r_i''\bar\xi\,r_0+r_i'r_0'\,\bar\xi-r_0''\bar\xi\,r_i-r_0'r_i'\,\bar\xi,$$

вс„ выражение (17.8) можно записать как

$$\int\sum_i\bar y_i\,\psi\,[r_i,r_0]'\bar\xi\,dt\;. \tag{17.9}$$

Члены типа $\bar y\,\bar y$ из (17.2)–(17.4) в сумме равны

$$\int\frac{1}{2}\,\sum\bar y_i\bar y_j\,\psi(-r_0''r_ir_j-r_0'r_i'r_j+r_i''r_0r_j+r_i'r_j'r_0+2r_i'\,[r_0,r_j])\,dt.$$

Нетрудно проверить, что эта величина совпадает с

$$\int\frac{1}{2}\,\sum_i\bar y_i\bar y_j\,\psi\,[r_i,[r_0,r_j]\,]\,dt. \tag{17.10}$$

Для этого надо раскрыть все скобки Ли и переставить в некоторых членах индексы i,j. Это можно делать, так как для любой квадратичной формы справедливо $\sum a_{ij}\bar y_i\bar y_j=\sum a_{ji}\bar y_i\bar y_j$.

Далее, член типа $\bar y_i\,\bar u_j$ присутствует только в (17.3); он равен

$$\int\frac{1}{2}\,\sum_i\psi\,[r_i,r_j]\,\bar y_i\bar u_j\,dt \tag{17.11}$$

(мы здесь переставили индексы и поменяли знак).

Наконец, рассмотрим внеинтегральные члены, появившиеся из-за интегрирования по частям. Они присутствуют в (17.3) и (17.4):

$$-\sum\frac{1}{2}\,\psi(r_i'\,r_j)\,\bar y_i\bar y_j\Big|_T-\sum\bar y_i\,\psi(r_i'\,\bar\xi)\Big|_T\;.$$

Но в силу концевого равенства (7.9), $\bar\xi(T)=-\sum\bar y_j(T)\,r_j(\hat x(T))$, поэтому внеинтегральный член равен

$$\frac{1}{2}\,\sum_i\psi\,(r_i'\,r_j)\,\bar y_i\bar y_j\Big|_T\;. \tag{17.12}$$

Суммируя (17.7)–(17.12), получаем формулу (7.11).

Рассмотрим теперь квадратичную форму $\Omega_S[\psi](\bar{w})$ для задачи (S), соответствующей уравнению (11.4). Линеаризация (11.5) этого уравнения отличается от линеаризации (7.4) уравнения (6.1) задачи (S_1) лишь тем, что теперь сумма $\sum \bar{u}_i r_i(\hat{x})$ бер,,тся по i не от 1, а от 0 до $k-1$. Во второй вариации функции Лагранжа для уравнения (11.4), как уже говорилось, по сравнению с (7.11), появятся два дополнительных члена (11.7). Первый из них действительно новый: $-\int \bar{z}\bar{u}_0\,(\psi\, r_0)\,dt$, и так как в силу ПМ $\psi\, r_0(\hat{x}) = \text{const}$ (а для особой траектории $=0$), то он равен

$$-\bar{z}\bar{y}_0\,(\psi\, r_0)\Big|_T . \tag{17.13}$$

Второй же член соответствует тому, что в последнем члене в (17.1) суммирование опять надо брать по $i = 0, 1, \ldots, k-1$. Тогда $\Omega_S[\psi]$ будет иметь вид (7.11), в котором все суммы берутся по i, j начиная с 0, плюс дополнительный внеинтегральный член (17.13). Таким образом, в итоге Ω_S будет отличаться от (7.11) наличием следующих дополнительных членов (они соответствуют $i=0,\ j=0)$:

$$\Big(-\bar{z}\bar{y}_0\,(\psi\, r_0) + \frac{1}{2}\ \bar{y}_0^2\,\psi(r_0' r_0) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k-1} \bar{y}_i\bar{y}_0\,\psi(r_i' r_0 + r_0' r_i)\Big)\Big|_T +$$

$$+\int_0^T \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k-1} \bar{y}_i\bar{y}_0\,\psi\,[\,[r_i, r_0], r_0]\,dt.$$

(Мы здесь учли (17.6) и тот факт, что $[r_0(x), r_0(x)] = 0$ в любой точке x.)

Определим теперь множество $G_a(\Lambda(S))$, учитывая, что в задаче (S) имеется поточечное ограничение $u_0(t) \le 1$, и следовательно, Ω_S рассматривается на поточечном конусе $N = \{\bar{u} \in \mathbb{R}^k \mid \bar{u}_0 \le 0\}$ (касательном к этому ограничению). Для квадратичной формы общего вида (7.12) при наличии ограничения $\bar{u}(t) \in N$ это множество, согласно [9, 10, 18], состоит из всех $\lambda \in \Lambda(S)$, удовлетворяющих условиям (7.14) на максимальном подпространстве N_0, содержащемся в N, и кроме того, условию:

$$(V[\lambda](t)\,\bar{y}, \bar{u}) = 0 \qquad \forall\, \bar{y} \in N_0,\ \ \bar{u} \in N. \tag{17.14}$$

Для задачи (S) подпространство $N_0 = \{\bar{u} \mid \bar{u}_0 = 0\}$, поэтому условия (7.14) означают выполнение условий (7.17), (7.18), а дополнительное условие (17.14) означает выполнение условия (7.17) и для $j = 0:\quad \psi(t)\,[r_i, r_0](\hat{x}(t)) = 0$. Но, согласно (17.6), оно автоматически выполнено в силу ПМ. Таким образом, для задачи (S) множество $G_a(\Lambda(S))$ определяется теми же условиями (7.17), (7.18).

Приложение D.

Доказательство оценки (9.11). Положим $x = \xi + By$. Из уравнения (9.10) получаем $\dot{\xi} = A\xi + (AB - \dot{B})y$, и так как $y(0) = 0$, то $\xi(0) = x(0)$. Тогда $||\xi||_\infty \le$

$\mathrm{const}\,(|x(0)| + ||y||_2) \le \mathrm{const}\sqrt{\gamma(w)}$, и следовательно, $||x||_2 \le ||\xi||_2 + ||By||_2 \le \mathrm{const}\sqrt{\gamma(w)}$. Кроме того, $|x(T)| \le |\xi(T)| + |By(T)| \le \mathrm{const}\sqrt{\gamma(w)}$. Суммируя эти оценки, получаем оценку (9.10).

Доказательство леммы 9.2. Эта лемма фактически повторяет лемму 6.4 из [7], однако для полноты изложения дадим здесь ее доказательство. Так как (x_n, u_n) удовлетворяют уравнению (9.10), то в силу оценки (9.11),

$$|x_n(0)|^2 + |x_n(T)|^2 + \int_0^T |x_n|^2\,dt \le \mathcal{O}(\gamma_n). \tag{17.15}$$

Имеем тогда:

$$\begin{aligned}\Omega(w_n') =\ & \Omega(w_n) + \Omega(\tilde w_n) + 2(Sp_n, \tilde p_n) + \\ +2\int_0^T & \Big((Dx_n, \tilde x_n) + (x_n, C\tilde u_n) + (\tilde x_n, Cu_n)\Big)\,dt.\end{aligned} \tag{17.16}$$

Из оценки (9.12) вытекает, что $\Omega(\tilde w_n) = o(\gamma_n)$. Из (17.15) следует, что $|p_n| = |(x_n(0), x_n(T))| \le \mathcal{O}(\sqrt{\gamma_n})$, а из (9.12) – что $|\tilde p_n| \le o(\sqrt{\gamma_n})$, поэтому внеинтегральный смешанный член в (17.16) также есть $o(\gamma_n)$. Для первых двух интегральных смешанных членов справедлива следующая оценка (выпишем ее только для второго члена):

$$\int \Big|(x_n, C\tilde u_n)\Big|\,dt \ \le \mathrm{const}\ ||x_n||_2\,||\tilde u_n||_2 \ =\ o\,(\gamma_n) \tag{17.17}$$

в силу тех же оценок (17.15), (9.12).

Осталось оценить последний интегральный член в (17.16), для которого непосредственная оценка, аналогичная (17.17), не получается. Для него мы воспользуемся основным приемом, применяющимся при исследовании задач, линейных по управлению, а именно – проинтегрируем его по частям, имея в виду, что $u_n = \dot y_n$. Тогда получим:

$$\int_0^T (\tilde x_n, Cu_n)\,dt \ =\ (\tilde x_n, Cy_n)\Big|_0^T - \int_0^T \Big((\tilde x_n, \dot C y_n) + (\dot{\tilde x}_n, Cy_n)\Big)\,dt.$$

Подставляя сюда $\dot{\tilde x}_n = A\tilde x_n + B\tilde u_n$, и учитывая (9.12), опять получаем, что вся эта величина есть $o(\gamma_n)$. Таким образом, лемма 9.2 доказана.

Приложение E.

Здесь мы выпишем кубический функционал $\rho[\lambda](\bar w)$ и приведем определение множества $E_a(\Lambda)$ для задачи (S) из §11.

Пусть для общей системы, линейной по управлению: $\dot x = f_0(x,t) + F(x,t)u$, где $u \in \mathbb{R}^k$, а F есть $k \times n$-матрица, рассматривается задача: $g(p) = 0$,

$\varphi_i(p) \le 0,\ \ i = 1,\dots,\nu,\quad J = \varphi_0(p) \to \min,\quad u \in U,$ где $p = (x_0, x_T)$, а U – многогранное множество в $\mathbb{R}^k$, и пусть задана исследуемая траектория $\hat w = (\hat x, \hat u)$. Будем предполагать, что $\hat u(t)$ непрерывна и $\forall\, t$ лежит в относительной внутренности одной и той же грани множества U.

Согласно [7, 10, 18], надо рассмотреть разложение уравнения системы на траектории $\hat w$ до квадратичного члена типа $\bar x\, \bar u$:

$$\dot{\bar x} = A(t)\bar x + B(t)\bar u + (R(t)\bar x, \bar u) + \dots\,,$$

которое определяется матрицами $A(t) = f_0'(\hat x(t),t) + F'(\hat x(t),t)\hat u(t), \quad B(t) = F(\hat x(t),t),$ и тензором $R(t) = F'(\hat x(t),t)$ (штрих обозначает производную по x), и для каждого $\lambda \in \Lambda$ определить кубический функционал

$$\rho[\lambda](\bar w) = \int_0^T \Big[-\Big(\frac{1}{2}\, H_{uxx}[\lambda]\bar x, \bar x, \bar u) + (H_{xu}[\lambda]\bar y, (R(t)\bar x, \bar u)\Big)\Big]\, dt.$$

Далее, надо положить здесь $\bar x = B(t)\bar y$, где, как всегда у нас, $\dot{\bar y} = \bar u$, $\bar y(0) = 0$, в результате чего получим функционал

$$\eta[\lambda](\bar y) = \int_0^T \Big(\mathcal{E}[\lambda](t)\, \bar y, \bar y, \bar u\Big)\, dt, \tag{17.18}$$

где $\mathcal{E}[\lambda](t)$ – некоторый тензор третьего ранга в пространстве $\mathbb{R}^k$. Для каждого фиксированного t_* он определяет дифференциальную 1–форму

$$\omega[\lambda](t_*) = \Big(\mathcal{E}[\lambda](t_*)\, \bar y, \bar y, d\bar y\Big).$$

Пусть N есть касательный конус к множеству U в точке $\hat u(t)$. В силу предположений относительно $\hat u(t)$ он не зависит от t. Пусть N_0 есть максимальное линейное подпространство, содержащееся в N. Тогда, согласно [7], множество $E_a(\Lambda)$ состоит из всех $\lambda \in G_a(\Lambda)$, для которых при каждом t 1-форма $\omega[\lambda](t_*)$ замкнута: $d\omega[\lambda](t_*) = 0$ (или, что эквивалентно, точна, поскольку вс„ происходит в $\mathbb{R}^k$). Дифференциал здесь берется по $\bar y$, а λ, t_* играют роль параметров.

Выясним, что означает это условие для задачи (S) из §11. Фазовые переменные здесь z, x; функция Понтрягина $H[\lambda](z,x,u) = zu_0(\psi, r_0(x)) + \sum u_j(\psi, r_j(x))$. Разложение системы (11.4) на траектории $\hat w$ имеет вид:

$$\dot{\bar x} = \bar z r_0(\hat x) + r_0'(\hat x)\bar x + \sum_{i=0}^{k-1} \bar u_i r_i(\hat x) + \sum_{i=0}^{k-1} \bar u_i r_i'(\hat x)\bar x + \dots\,, \tag{17.19}$$

при этом $B(t)\bar u$ и $(R(t)\bar x, \bar u)$ есть соответственно предпоследний и последний из выписанных членов этого разложения. Тогда на подпространстве $N_0 = \{\bar u_0 = 0\}$ имеем:

$$\rho[\lambda](\bar w) = \int_0^T \left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k-1} \bar u_i\, \psi\Big(r_i''(\hat x)\bar x, \bar x\Big) + \sum_{j=1}^{k-1} \bar y_j\, \psi\Big(r_j'(\hat x)(\sum_{i=1}^{k-1} \bar u_i r_i'(\hat x)\bar x)\Big)\right) dt. \tag{17.20}$$

(Сюда $\bar z, \bar u_0$ уже не входят; $(r_i''\bar x, \bar x)$ есть векторная квадратичная форма, которая затем скалярно умножается на ковектор ψ.) Подставляя сюда $\bar x = \sum \bar y_s r_s(\bar x)$, получаем:

$$\eta[\lambda](\bar y) = \int_0^T \Big(-\frac{1}{2} \sum_{ijs} \bar u_i \bar y_j \bar y_s \, \psi(r_i'' r_j r_s) + \sum_{ijs} \bar u_i \bar y_j \bar y_s \, \psi(r_j' r_i' r_s)\Big)\, dt,$$

и следовательно,

$$\omega[\lambda](t_*) = -\frac{1}{2} \sum_{ijs} \psi(r_i'' r_j r_s)\, \bar y_j \bar y_s d\bar y_i \; + \; \sum_{ijs} \psi(r_j' r_i' r_s)\, \bar y_j \bar y_s d\bar y_i .$$

Все коэффициетны здесь постоянны (заморожены в точке t_*), поэтому нетрудно проверить, что замкнутость этой 1-формы эквивалентна выполнению равенств

$$\psi\, [r_s\, [r_i, r_j]\,](\hat x(t_*)) = 0, \qquad \forall\, i, j, s = 1, \ldots, k-1. \tag{17.21}$$

Действительно, у нас

$$d\,\omega[\lambda](t_*) = -\frac{1}{2} \sum \psi(r_i'' r_j r_s)\Big(\bar y_s\, d\bar y_j \wedge d\bar y_i + \bar y_j\, d\bar y_s \wedge d\bar y_i\Big) +$$

$$+ \sum \psi(r_j' r_i' r_s)\Big(\bar y_s\, d\bar y_j \wedge d\bar y_i + \bar y_j\, d\bar y_s \wedge d\bar y_i\Big) = 0.$$

Равенство $d\omega = 0$ (опускаем λ, t_*) означает, что для любой тройки индексов $i, j, s = 1, \ldots, k-1$ коэффициенты при мономах $\bar y_s\,(d\bar y_j \wedge d\bar y_i)$ и $\bar y_s\,(d\bar y_i \wedge d\bar y_j)$ в сумме равны нулю, т.е.

$$-\frac{1}{2}\,\psi(r_i'' r_j r_s) + \frac{1}{2}\,\psi(r_j'' r_i r_s) - \frac{1}{2}\,\psi(r_i'' r_s r_j) + \frac{1}{2}\,\psi(r_j'' r_s r_i) +$$

$$+\psi(r_j' r_i' r_s) - \psi(r_i' r_j' r_s) + \psi(r_s' r_i' r_j) - \psi(r_s' r_j' r_i) \; = \; 0.$$

В первых двух членах этого равенства можно поменять порядок аргументов (r_j, r_s и соответственно r_i, r_s), и тогда, приведя подобные члены, получим:

$$-\psi(r_i'' r_s r_j) \; + \; \psi(r_j'' r_s r_i) \; + \tag{17.22}$$

$$+\; \psi(r_j' r_i' r_s) - \psi(r_i' r_j' r_s) \; + \; \psi(r_s' r_i' r_j) - \psi(r_s' r_j' r_i) \; = \; 0.$$

(Последние четыре члена оставлены без изменения.)

С другой стороны, если в равенстве (17.21) раскрыть двойные скобки Ли, то мы в точности получим равенство (17.22). Таким образом, эквивалентность условия $d\,\omega = 0$ равенствам (17.21) доказана.

Л и т е р а т у р а

[1] Г.А.Блисс, Лекции по вариационному исчислению, М., ИЛ, 1950.

[2] А.Я.Дубовицкий, А.А.Милютин, Теория принципа максимума, *В кн. "Методы теории экстремальных задач в экономике,"* М., Наука, ЦЭМИ, 1981, с. 6–47.

[3] А.А.Милютин, Принцип максимума в регулярной задаче оптимального управления, *В кн. "Необходимое условие в оптимальном управлении,"* М., Наука, 1990.

[4] K.Makowski, L.W.Neustadt, Optimal control problems with mixed control-phase variable equality and inequality constraints, *SIAM J. on Control and Optimization*, 1974, v. 12, No. 2, p. 184–228.

[5] А.В.Дмитрук, А.А.Милютин, Н.П.Осмоловский, Теорема Люстерника и теория экстремума, *Успехи мат. наук,* 1980, т. 35, N 6, с. 11–46.

[6] А.В.Дмитрук, Условия типа Якоби для задачи Больца с неравенствами, *Мат. заметки,* 1984, т. 35, N 6, с. 813–827.

[7] А.В.Дмитрук, Квадратичные условия понтрягинского минимума в задаче оптимального управления, линейной по управлению. I. Теорема о расшифровке, *Известия АН СССР, сер. мат.,* 1986, т. 50, N 2, с. 284–312.

[8] A.V.Dmitruk, Second Order Necessary and Sufficient Conditions of a Pontryagin minimum for singular regimes, *Lecture Notes in Control and Information Sciences,* 1992, v. 180, p. 334–343.

[9] А.В.Дмитрук, Квадратичные условия понтрягинского минимума для особых экстремалей в задачах оптимального управления, *Докторская диссертация,* Санкт-Петербургский университет, 1994.

[10] A.V.Dmitruk, Second Order Necessary and Sufficient Conditions of a Pontryagin Minimum for Singular Boundary Extremals, *Proc. of the Third Intern. Congress on Industrial and Appl. Math., Hamburg, 1995*, Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, Issue 3, p. 411–412.

[11] R.Bryant, L.Hsu, Rigidity of Integral Curves of Rank 2 Distributions, *Inventiones Mathematicae*, 1993, v. 114, p. 435–461.

[12] Н.Н.Петров, О кратчайших субримановых геодезических, *Дифференциальные уравнения*, 1994, т. 30, N 5.

[13] W.Liu, H.J.Sussmann, Shortest paths for sub-Riemannian metrics on rank 2 distributions, *Memoirs of the Amer. Math. Society,* No. 564, v. 118, November 1995.

[14] R.Montgomery, Abnormal minimizers, *SIAM J. on Control and Optimization*, 1994, v. 32, No. 4, p. 1605–1620.

[15] R.Montgomery, Survey of Singular Curves in Sub-Riemannian Geometry, *J. of Dynamical and Control Systems*, 1995, v. 1, No. 1, p. 49–90.

[16] A.A.Agrachev, A.V.Sarychev, Strong minimality of abnormal geodesics for 2-distributions, – ibid., v. 1, No. 2, p. 139–176.

[17] А.А.Милютин, Понятие жесткости и теория оптимального управления, *Труды Московского математического общества,* 1998, т. 60, с. 98–154.

[18] A.V.Dmitruk, Quadratic order conditions of a local minimum for singular extremals in a general optimal control prooblem, *Proc. of Symposia in Pure Mathematics, v. 64 "Differential Geometry and Control"* (eds. G.Ferreyra, et al.), American Math. Society, 1998, p. 163–198.

[19] A.V.Dmitruk, Quadratic sufficient conditions for a strong minimality of abnormal sub-Riemannian geodesics, *Russian Journal of Math. Physics,* Wiley, 1999, v. 6, No. 3, p. 363–372.

Опубликовано в сб. "Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения", т. 65 (Труды конференции, посвященной 90-летию Л.С.Понтрягина, т. 4, Оптимальное управление), М., 2000, с. 5-—89.