Математические заметки, 2005, т.78, №4

Теорема существования в задаче оптимального управления на бесконечном интервале времени

А.В. Дмитрук, Н.В. Кузькина

1 Введение

Задачи оптимального управления на бесконечном интервале времени возникают как в теоретических, так и в прикладных разделах математики, например, в динамических моделях математической экономики [1]–[7]. Вопрос о существовании решения в таких задачах решается не столь просто, как в задачах на конечном отрезке времени [8]–[10]. В имеющихся на эту тему работах условия существования либо чересчур ограничительны, либо сложно формулируются и поэтому не очень просто проверяются. В данной работе мы рассматриваем широкий класс задач, включающий, в частности, многие задачи экономической динамики, и предлагаем довольно естественные условия, обеспечивающие существование решения в этих задачах, которые слабее всех известных условий.

2 Постановка задачи, предположения

На полуинтервале $[0,\infty)$ будем рассматривать n-мерные функции $x(t)$, абсолютно непрерывные на любом отрезке $[0,T]$ (будем писать, что $x(\cdot) \in AC[0,\infty)$) и измеримые r-мерные функции $u(t)$, которые на любом отрезке $[0,T]$ существенно ограничены (пространство таких функций обозначим $L_\infty[0,\infty)$).

Обратим внимание, что функции из $AC[0,\infty)$ могут не быть абсолютно непрерывными на всей полупрямой $[0,\infty)$. Аналогичное замечание относится и к функциям из $L_\infty[0,\infty)$. (Более специальных обозначений для пространств AC и L_∞ на $[0,\infty)$ мы не вводим, так как эти пространства будут у нас пониматься только в указанном смысле.)

На пространстве пар функций (x,u) будем рассматривать следующую задачу оптимального управления:

$$J(x,u) = \ \beta(x(0)) + \int\limits_0^\infty \varphi(t,x,u)\,dt \ \to \min, \tag{1}$$

$$\dot{x} = f(t,x,u), \tag{2}$$

$$x(0) \in M_0\,, \tag{3}$$

$$u(t) \in U(t,x(t))\,, \tag{4}$$

$$x(t) \in S(t)\,. \tag{5}$$

Пары функций $(x,u) \in AC \times L_\infty[0,\infty)$, удовлетворяющие на $[0,\infty)$ ограничениям (2)–(5), будем называть допустимыми (как обычно, для измеримых функций все соотношения понимаются выполненными почти всюду), а множество всех допустимых пар обозначим через Ω. Функционал (1) рассматривается на всех парах $(x,u) \in \Omega$, для которых соответствующий интеграл Лебега по любому отрезку $[0,T]$ существует и при $T \to \infty$ сходится к конечному или бесконечному пределу. Таким образом,

$$J(x,u) = \lim_{T\to\infty} J_T(x,u), \qquad \text{где} \quad J_T(x,u) = \ \beta(x(0)) + \int\limits_0^T \varphi(t,x,u)\,dt,$$

а предел мы понимаем в указанном расширенном смысле. (Ниже мы приведем условие, гарантирующее сходимость интеграла на любой паре $(x,u) \in \Omega$.)

Замечание. Чтобы избавиться от "неудобного" вопроса о сходимости интеграла в (1), в некоторых работах предлагается изменить само понятие оптимальности, а точнее, сам принцип сравнения двух допустимых пар: предлагается сравнивать не предельные значения функционала (1) (которых может не существовать), а рассматривать поведение разности функционалов $J_T(x'',u'') - J_T(x',u')$ на отрезках $[0,T]$ при $T \to \infty$. При этом естественного однозначного толкования, для какой пары семейство значений J_T "лучше", не получается, приходится рассматривать несколько различных толкований, и соответственно, несколько разных понятий оптимальности (см. работы [4]–[7] и литературу в них). В данной статье мы не касаемся этих обобщений. Допустимые пары сравниваются здесь обычным образом — по значению функционала на них, и соответственно, оптимальность понимается как достижение минимально возможного значения функционала.

Предположения:

П1) Функция $f(t,x,u)$ непрерывна по паре (t,x) и линейна по u , т.е. $f(t,x,u) = a(t,x) + B(t,x)u$, где $n-$ мерный вектор a и $n \times r-$ матрица B непрерывно зависят от (t,x) ;

П2) множество $S(t)$ замкнуто $\forall\, t \ge 0$, а зависимость его от t произвольна;

П3) множество M_0 есть компакт в $\mathbb{R}^n$;

П4) многозначное отображение $U : \mathbb{R}^{1+n} \to \mathbb{R}^r$ полунепрерывно сверху и для любых (t,x) множество $U(t,x)$ есть выпуклый компакт;

П5) функция f вместе с отображениями S и U удовлетворяет условию Филиппова [8], т.е. существует такое c , что $\forall\, t \ge 0$, $\forall\, x \in S(t)$, $\forall\, u \in U(t,x)$

$$(x, f(t,x,u)) \le c(|x|^2 + 1);$$

П6) функция $\beta(\cdot)$ непрерывна на M_0 ;

П7) функция $\varphi(t,x,u)$ непрерывна по (t,x,u) и выпукла по u .

(Обратим внимание, что если $S(t)$ и $U(t,x)$ равномерно ограничены, то предположение П5 заведомо выполнено. Однако выполнение П5 и в этом, и в общем случае еще не гарантирует существования допустимой траектории системы (2)–(5) на заданном отрезке $[0,T]$, и тем более на $[0,\infty)$. Наличие допустимой траектории, как и всегда в теоремах существования в задачах на экстремум, будет не доказываться, а просто постулироваться.)

Все эти предположения вполне стандартны для теорем существования в задаче на фиксированном конечном отрезке. Кроме них, мы примем еще одно предположение относительно поведения семейства функций $\varphi(t,x(t),u(t))$ на бесконечности.

Для любого числа a обозначим $a^+ = \max(a,0)$, $a^- = \max(-a,0)$ (обе эти величины неотрицательные), так что $a = a^+ - a^-$.

Назовем *куском* функционала J на отрезке $[T',T'']$ величину

$$\int\limits_{T'}^{T''} \varphi(t,x(t),u(t))\,dt\,.$$

Следующее предположение является ключевым для наших целей.

Предположение П8. Отрицательные части кусков функционала сходятся к 0 при $T', T'' \to \infty$, $T' < T''$, равномерно по всем допустимым траекториям.

Другими словами, $\forall\, \varepsilon > 0$ существует T_ε такое, что $\forall\, T'' > T' > T_\varepsilon$, $\forall\, (x,u) \in \Omega$

$$\int\limits_{T'}^{T''} \varphi(t,x(t),u(t))\,dt \;>\; -\varepsilon\,.$$

Это условие очевидно эквивалентно следующему: существует функция $\alpha(T) \to 0+$ при $T \to \infty$, и число T_0 такие, что $\forall\, T > T_0$ и $\forall\, T'' > T' \geq T$, $\forall\,(x, u) \in \Omega$

$$\int\limits_{T'}^{T''} \varphi(t, x(t), u(t))\, dt \;\geq\; -\alpha(T)\,. \tag{6}$$

Ниже мы укажем некоторые случаи, когда это предположение заведомо выполнено.

Установим, что выполнение предположения П8 на Ω гарантирует сходимость интеграла (в вышеуказанном расширенном смысле) для любой пары $(x, u) \in \Omega$. Нам потребуется следующий простой факт.

Лемма 1. Пусть числовая последовательность γ_k не имеет предела (конечного или бесконечного). Тогда существуют числа $z_1 < z_2$ такие, что $\forall\, K$ $\exists\, k_1,\ k_2 > K$, для которых $\gamma_{k_1} < z_1$ и $\gamma_{k_2} > z_2$.

Доказательство. Так как последовательность γ_k не имеет предела, из нее можно выделить две подпоследовательности, сходящиеся к разным пределам: $\gamma_{k_s^1} \to c_1$ и $\gamma_{k_s^2} \to c_2$, где $c_1 < c_2$ (при этом возможны случаи $c_1 = -\infty$, $c_2 = +\infty$). Возьмем любые $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$ такие, что $c_1 < z_1 < z_2 < c_2$. Тогда $\forall\, K$ найдется номер $k_1 > K$ из последовательности k_s^1 и номер $k_2 > K$ из последовательности k_s^2 такие, что $\gamma_{k_1} < z_1$, $\gamma_{k_2} > z_2$. Лемма доказана. $\square$

Лемма 2. Пусть функционал J удовлетворяет предположению П8. Тогда $\forall\,(x, u) \in \Omega$ соответствующий интеграл сходится либо к конечному пределу, либо к $+\infty$.

Доказательство. Допустим сначала, что для некоторой пары $(x, u) \in \Omega$ интеграл не сходится (в нашем расширенном смысле), т.е. не существует

$$\lim_{T\to\infty} \int\limits_0^T \varphi(t, x(t), u(t))\, dt\,. \tag{7}$$

Значит, этот предел не существует и для некоторой счетной последовательности $T \to \infty$. Тогда по лемме 1 найдутся числа $z_1 > z_2$ такие, что $\forall\, T$ существуют $T_1 > T$ и $T_2 > T_1$ из этой счетной последовательности, для которых $J_{T_1}(x, u) > z_1$, $J_{T_2}(x, u) < z_2$, и поэтому

$$\int\limits_{T_1}^{T_2} \varphi(t, x(t), u(t))\, dt \;=\; J_{T_2}(x, u) - J_{T_1}(x, u) \;<\; z_2 - z_1 \;= const < 0\,.$$

Но это противоречит предположению П8. Значит, наше допущение неверно.

Рассмотрим теперь случай, когда предел (7) равен $-\infty$. Тогда для любого T' найдется такое $T'' > T'$, что

$$\int_0^{T''} \varphi(t, x(t), u(t))\, dt \; < \; \int_0^{T'} \varphi(t, x(t), u(t))\, dt \; - 1,$$

и следовательно, $\int_{T'}^{T''} \varphi(t, x(t), u(t))\, dt < -1$, т.е. при $\varepsilon = 1$ опять приходим к противоречию с П8. Лемма доказана. $\square$

Таким образом, для любой допустимой пары (x, u) величина $J(x, u) = \lim_T J_T(x, u)$ определена корректно, причем J всегда принимает либо конечные значения, либо $+\infty$. Кроме того, из доказательства леммы 2 видно, что П8 является наиболее естественным предположением, обеспечивающим эти свойства функционала J.

Теорема 1 (Основная). Пусть при сделанных предположениях П1–П8 существует хотя бы одна пара $(x, u) \in \Omega$, на которой $J(x, u) < +\infty$. Тогда $\exists\ (x_0, u_0) \in \Omega$, на которой функционал достигает своего минимального значения (т.е. в поставленной задаче существует решение).

Для доказательства нам потребуется ряд свойств функционала J и множества допустимых траекторий на фиксированном отрезке $[0, T]$.

3 Некоторые свойства для фиксированного отрезка

Лемма 3. Пусть $U(y)$ — полунепрерывное сверху многозначное отображение $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^r$ с компактными значениями. Тогда на любом компактном (а значит, и на любом ограниченном) множестве y значения $U(y)$ равномерно ограничены, т.е. для любого компакта $K \subset \mathbb{R}^m$ существует такая константа R, что $\forall\, y \in K$ множество $U(y)$ содержится в шаре $B_R(0)$.

Доказательство. В силу полунепрерывности сверху отображения $U(y)$, для любого y существует некоторая его окрестность $\mathcal{O}(y)$ такая, что $\forall\, y' \in O(y)$ выполнено включение $U(y') \subset U(y) + B_1(0)$. Объединение окрестностей $\mathcal{O}(y)$ по всем $y \in K$ покрывает весь компакт K, и по определению компакта из этого покрытия можно выбрать конечное подпокрытие. Т.е. существует конечное число точек $y_1, \ldots, y_m \in K$ и их окрестностей $\mathcal{O}(y_i)$ таких, что $\forall\, y' \in \mathcal{O}(y_i)$ множество $U(y')$ содержится в $U(y_i) + B_1(0)$, и эти окрестности покрывают весь компакт K.

Объединение V ограниченных множеств $U(y_i) + B_1(0)$ по всем $i = 1, \ldots, m$ также будет ограниченным, т.е. будет целиком содержаться в шаре $B_R(0)$ при некотором R. А так как $\forall\, y \in K$ найдется номер i, для которого $y \in \mathcal{O}(y_i)$, то $U(y) \subset U(y_i) + B_1(0) \subset V$, и поэтому $U(y) \subset B_R(0)$. $\square$

Следствие. Пусть отображение $U(t,x) : \mathbb{R}^{1+n} \to \mathbb{R}^r$ полунепрерывно сверху и имеет компактные значения. Тогда для любого $T > 0$ и любого ограниченного множества $Q \subset \mathbb{R}^n$ найдется такое $R = R(T,Q)$, что $\forall\, t \in [0,T]$, $\forall\, x \in Q$ выполнено включение $U(t,x) \subset B_R(0)$.

Для доказательства надо применить лемму 3 к отображению $U(y)$, где $y = (t,x)$, и компакту $K = [0,T] \times \overline{Q}$.

Лемма 4. Пусть полунепрерывное сверху отображение $U(t,x)$ имеет компактные значения и пусть функция $f(t,x,u)$ вместе с отображениями S и U удовлетворяет предположению П5 (т.е. условию Филиппова). Пусть также дано ограниченное множество $M_0 \subset \mathbb{R}^n$. Тогда $\forall\, T$ существуют такие константы $D_T,\, D'_T,\, R_T$, что для любого решения системы (2)–(5) почти всюду на $[0,T]$ выполняются оценки

$$|x(t)| \le D_T\,, \qquad |\dot{x}(t)| \le D'_T\,, \qquad |u(t)| \le R_T\,. \tag{8}$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $z(t) = |x(t)|^2 + 1$. Для нее на траекториях системы (2) имеем $\dot{z} = 2(x,f)$, поэтому в силу П5 имеем $\dot{z} \le 2c(|x|^2+1)$, т.е. $\dot{z} \le 2cz$. Учитывая, что $z(t) \ge 0$, отсюда получаем, что $\forall\, t \ge 0\;\; z(t) \le z(0)e^{2ct}$. Если $|M_0| \le r$, то на отрезке $[0,T]$ будет выполнено неравенство $z(t) \le (r^2+1)\, e^{2cT}$, из которого и вытекает первая требуемая оценка в (8).

Так как $|x(t)| \le D_T$, то по следствию из леммы 3 $\;|u(t)| \le R_T$ с некоторой R_T, поэтому тройка $(t, x(t), u(t))$ всегда принадлежит компакту $[0,T] \times B_{D_T}(0) \times B_{R_T}(0)$. В силу непрерывности функции f она ограничена на этом компакте некоторой константой D'_T. Отсюда $|\dot{x}(t)| \le D'_T$. Лемма доказана. $\square$

Таким образом, множество решений $x(t)$ системы (2)–(5) равномерно ограничено и равномерно липшицево, а множество управлений $u(t)$ равномерно ограничено. Отсюда в силу теорем Асколи–Арцела и Алаоглу [13], получаем

Следствие. Множество решений $x(t)$ системы (2)–(5) предкомпактно в пространстве $C[0,T]$, а соответствующее множество управлений $u(t)$ предкомпактно в пространстве $L_\infty[0,T]$ относительно слабой-* топологии (т.е. относительно топологии, определяемой функционалами из $L_1[0,T]$.) $\square$

Пусть Ω_T есть множество всех $(x,u) \in AC[0,T] \times L_\infty[0,T]$, удовлетворяющих на $[0,T]$ ограничениям (2)–(5). Из только что полученного следствия вытекает, что Ω_T предкомпактно относительно произведения равномерной и слабой-* топологий. Как известно, на ограниченных множествах в пространстве $L_\infty[0,T]$ слабая-* топология метризуема (так как L_1 сепарабельно), поэтому при ее изучении достаточно рассматривать сходящиеся последовательности.

Лемма 5. Множество Ω_T замкнуто относительно равномерной сходимости $x(t)$ и слабой-* сходимости $u(t)$: если $(x_k, u_k) \in \Omega_T$, $x_k \Longrightarrow x_0$, $u_k \overset{\text{сл.}-*}{\longrightarrow} u_0$, то $(x_0, u_0) \in \Omega_T$.

Замкнутость ограничений $x(0) \in M_0$ и $x(t) \in S(t)$ очевидно вытекает из замкнутости множества M_0 и множества $S(t)$ при всех $t \geq 0$. Замкнутость ограничения $\dot{x} = f(t, x, u)$ также очевидно вытекает из линейности f по u, если перейти к интегральной форме этого уравнения.

Основная трудность — установить замкнутость включения $u(t) \in U(t, x(t))$. Это нетривиальный факт, представляющий самостоятельный интерес. Чтобы не отвлекаться далеко в сторону, мы здесь не приводим его доказательства. Отметим лишь, что он вытекает из замкнутости графика отображения $U(t, x)$ (которая вытекает из его полунепрерывности сверху) и выпуклости его значений; подробнее см., например, [10, §8.5, §10.6]. Лемма доказана. □

Суммируя полученные факты, приходим к следующему утверждению.

Лемма 6. Множество Ω_T есть метризуемый компакт в пространстве пар $(x, u) \in AC[0, T] \times L_\infty[0, T]$ относительно произведения топологии, порожденной нормой $||x||_C$, и слабой-* топологии по u .

Обратимся теперь к функционалу J_T, который можно считать заданным на пространстве $C[0, T] \times L_\infty[0, T]$.

Лемма 7. Пусть функция φ удовлетворяет предположению П7, и даны последовательности $x_k \Longrightarrow x_0$ (равномерно), $u_k \overset{\text{сл.}-*}{\longrightarrow} u_0$ (слабо в L_∞ относительно L_1) на отрезке $[0, T]$. Тогда

$$\int_0^T \varphi(t, x_0(t), u_0(t))dt \;\leq\; \liminf_{k\to\infty} \int_0^T \varphi(t, x_k(t), u_k(t))dt,$$

т.е. функционал $\int_0^T \varphi(t, x, u)\, dt$ полунепрерывен снизу относительно указанной сходимости.

Этот факт широко известен; см., например, [9]–[12]. Отсюда и из непрерывности $\beta(x)$ следует, что и наш функционал J_T также полунепрерывен снизу относительно указанной сходимости.

4 Доказательство основной теоремы

Вернемся к рассмотрению задачи на бесконечном интервале. Введем сходимость в пространствах функций на $[0,\infty)$.

Пусть $C[0,\infty)$ есть пространство всех непрерывных $n-$ мерных функций на $[0,\infty)$. Для элементов этого пространства будем писать, что $x_k \Longrightarrow x_0$, если x_k равномерно сходится к x_0 на любом отрезке $[0,T]$. Для элементов введенного выше пространства $L_\infty[0,\infty)$ будем писать $u_k \overset{\text{сл.}-*}{\longrightarrow} u_0$, если u_k слабо-$*$ сходится к u_0 на любом отрезке $[0,T]$.

Допустимое множество Ω можно рассматривать как подмножество пространства $C[0,\infty)\times L_\infty[0,\infty)$. Как следует из его определения, Ω состоит из всех тех пар (x,u), сужение которых на любой отрезок $[0,T]$ принадлежит соответствующему множеству Ω_T .

Лемма 8. Допустимое множество Ω замкнуто относительно введенной сходимости, т.е. если $(x_k,u_k)\in\Omega$, $x_k \Longrightarrow x_0$, $u_k \overset{\text{сл.}-*}{\longrightarrow} u_0$, то $(x_0,u_0)\in\Omega$.

Доказательство. По определению $\forall\, T>0$ имеем $(x_k,u_k)\in\Omega_T$ и $x_k \Longrightarrow x_0$, $u_k \overset{\text{сл.}-*}{\longrightarrow} u_0$ на отрезке $[0,T]$, а так как по лемме 5 множество Ω_T замкнуто, то $(x_0,u_0)\in\Omega_T$. Отсюда и на всей полупрямой $(x_0,u_0)\in\Omega$, ч. т. д. □

Введем еще одно определение, которое будет удобно использовать в дальнейшем. Назовем *хвостом* функционала J на интервале (T,∞) величину

$$\Theta_T(x,u)=\int\limits_T^\infty \varphi(t,x(t),u(t))\,dt.$$

Это определение корректно, так как при выполнении предположения П8 интеграл сходится (в расширенном смысле) на любой паре $(x,u)\in\Omega$.

Лемма 9. Если на Ω выполняется предположение П8, то отрицательные части хвостов функционала стремятся к 0 при $T\to\infty$ равномерно по всем $(x,u)\in\Omega$.

Более того, при той же функции $\alpha(T)$ и при том же T_0 (фигурирующих в П8) $\forall\,(x,u)\in\Omega$ и $\forall\, T\ge T_0$

$$\Theta_T(x,u)\ \ge\ -\alpha(T)\,. \tag{9}$$

Доказательство. Пусть выполняется предположение П8, т.е. $\exists\ T_0$ и $\alpha(T)\to 0+$ такие, что $\forall\, T>T_0$ и $\forall\, T''>T'\ge T$, $\forall\,(x,u)\in\Omega$

$$\int\limits_{T'}^{T''}\varphi(t,x(t),u(t))\,dt\ \ge\ -\alpha(T)\,.$$

Фиксируя здесь T' и устремляя $T'' \to +\infty$, получаем требуемое неравенство (9). $\square$

Установим теперь аналог леммы 7 о полунепрерывности снизу функционала для бесконечного интервала.

Лемма 10. Пусть выполнены предположения П1–П8. Тогда функционал J полунепрерывен снизу на Ω относительно введенной сходимости, т.е. если $(x_k, u_k) \in \Omega$, $\quad x_k \Longrightarrow x_0$, $\quad u_k \overset{\text{сл.}-*}{\longrightarrow} u_0$, то

$$J(x_0, u_0) \;\le\; \liminf_{k\to\infty} J(x_k, u_k)\,.$$

Доказательство. Во-первых, по лемме 8 имеем $(x_0, u_0) \in \Omega$. Далее, пусть $\liminf\limits_{k\to\infty} J(x_k, u_k) = \mu_0$. Надо показать, что $J(x_0, u_0) \le \mu_0$.

Опять считаем $\beta(\cdot) \equiv 0$. Обозначим для краткости $\varphi_k(t) = \varphi(t, x_k(t), u_k(t))$. Для любого T функционал $J(x_k, u_k)$ можно представить в виде

$$J(x_k, u_k) = \int\limits_0^T \varphi_k(t)\, dt \;+ \Theta_T(x_k, u_k).$$

Так как J удовлетворяет предположению П8, то по лемме 9 $\forall\, T \ge T_0$ имеем $\Theta_T \ge -\alpha(T)$, поэтому

$$\int\limits_0^T \varphi_k(t)\, dt \;= J(x_k, u_k) - \Theta_T(x_k, u_k) \le\; J(x_k, u_k) + \alpha(T)\,,$$

и следовательно, при любом фиксированном T

$$\liminf_{k\to\infty} \int_0^T \varphi_k(t)\, dt \;\le\; \liminf_{k\to\infty} J(x_k, u_k) + \alpha(T) \;=\; \mu_0 + \alpha(T)\,.$$

Отсюда по лемме 7 получаем

$$\int\limits_0^T \varphi_0(t)\, dt \;\le \mu_0 + \alpha(T)\,.$$

Устремив теперь $T \to \infty$ и учитывая лемму 2, получаем окончательно

$$J(x_0, u_0) = \lim_{T\to\infty} \int\limits_0^T \varphi_0(t)\, dt \;\le \mu_0\ .$$

Лемма доказана. $\square$

Следующий пример показывает, что предположение П8 в этой лемме существенно: если его отбросить, она перестает быть верной.

Пример. Рассмотрим последовательность функций $u_k(t)$, равных -1 при $t \in [k, k+1]$, и 0 в остальных случаях. Эта последовательность слабо-* сходится в нашем смысле к $u_0 \equiv 0$. Положим $\varphi(t,x,u) = u$, $\beta(x) = 0$, $f(t,x,u) = 0$, $x(0) = 0$, $U(t,x) = [-1, 0]$.

Тогда все условия леммы 10, кроме предположения П8, выполнены. Но при этом неравенство

$$\int\limits_0^\infty \varphi(u_0(t))\, dt \;\le\; \liminf_{k\to\infty} \int\limits_0^\infty \varphi(u_k(t))\, dt$$

не выполняется: слева имеем 0, а интеграл справа при всех k есть

$$\int\limits_0^\infty \varphi(u_k(t))\, dt = \int\limits_k^{k+1} (-1)\, dt = -1.$$

Доказательство основной теоремы.

Возьмем произвольную минимизирующую последовательность $(x_k, u_k) \in \Omega :\; J(x_k, u_k) \to inf J = J_*$. Надо показать, что существует пара $(x, u) \in \Omega$, для которой $J(x, u) = J_*$.

1) Возьмем произвольное $T_1 > 0$. По лемме 6 множество Ω_{T_1} есть метризуемый компакт. Поэтому из последовательности (x_k, u_k) можно выбрать подпоследовательность (x_k^1, u_k^1), сходящуюся на $[0, T_1]$ к некоторой паре $(x_0^1, u_0^1) \in \Omega_{T_1}$. (Говоря, что x_k^1 есть подпоследовательность последовательности x_k, мы имеем в виду, что существует возрастающая последовательность номеров $n_k \to \infty$ такая, что $\forall\, k \;\; x_k^1 = x_{n_k}$.)

2) Возьмем любое $T_2 > T_1 + 1$. По аналогии с предыдущим, из последовательности (x_k^1, u_k^1) можно выбрать подпоследовательность (x_k^2, u_k^2), сходящуюся на $[0, T_2]$ к некоторой паре $(x_0^2, u_0^2) \in \Omega_{T_2}$.

При этом, так как (x_k^2, u_k^2) – подпоследовательность последовательности (x_k^1, u_k^1) , то на $[0, T_1]$ их пределы совпадают: $x_0^2 \equiv x_0^1$, $u_0^2 \equiv u_0^1$, т.е. новая предельная пара есть продолжение старой на отрезок $[T_1, T_2]$.

3) Далее возьмем любое $T_3 > T_2 + 1$ и из последовательности (x_k^2, u_k^2) выберем подпоследовательность (x_k^3, u_k^3), и т.д.

Таким образом, на m -ом шаге данной процедуры мы имеем $T_m > T_{m-1} + 1$ и последовательность (x_k^m, u_k^m), сходящуюся к некоторой паре $(x_0^m, u_0^m) \in \Omega_{T_m}$, которая на предыдущем отрезке $[0, T_{m-1}]$ совпадает с (x_0^{m-1}, u_0^{m-1}).

Определим пару $(x_0, u_0) \in AC \times L_\infty[0, \infty)$, которая на каждом отрезке $[0, T_m]$ совпадает с (x_0^m, u_0^m). Такое определение корректно, ибо при любом $k > m$ на отрезке $[0, T_m]$ имеем совпадение $(x_0^k, u_0^k) \equiv (x_0^m, u_0^m)$. Тогда на каждом $[0, T_m]$ имеем $(x_0, u_0) \in \Omega_{T_m}$, откуда по определению Ω вытекает, что на всей полупрямой $(x_0, u_0) \in \Omega$.

4) Рассмотрим диагональную последовательность (x_k^k, u_k^k) . Она, очевидно, обладает следующим свойством: для любого фиксированного m при всех $k \ge m$ эта последовательность содержится в последовательности (x_i^m, u_i^m), $i = 1, 2, ...,$ и поэтому на отрезке $[0, T_m]$ она сходится к $(x_0^m, u_0^m) = (x_0, u_0)$. А поскольку $T_m \to \infty$, последовательность (x_k^k, u_k^k) сходится к (x_0, u_0) на любом отрезке $[0, T]$, т.е. по определению сходится в пространстве $C[0, \infty) \times L_\infty[0, \infty)$.

5) Рассмотрим теперь функционал $J(x_k^k, u_k^k)$. По лемме 10 он полунепрерывен снизу относительно данной сходимости, поэтому

$$J(x_0, u_0) \le \liminf_{k \to \infty} J(x_k^k, u_k^k) = J_* \,,$$

и так как $J_* = inf\, J$, то неравенство $J(x_0, u_0) < J_*$ невозможно, и значит $J(x_0, u_0) = J_*$, ч.т.д. $\square$

Замечание. Так как для всех $T > 0$ сходимость в Ω_T задается некоторой метрикой ρ_T , то сходимость в Ω также может быть задана метрикой, в качестве которой можно взять, например, стандартную комбинацию

$$\rho((x', u'), (x'', u'')) \; = \; \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m} \, F\left(\rho_{T_m}((x', u'), (x'', u''))\right),$$

где $T_m \to \infty$, а $F(z) = z/(1+z)$. В пунктах 1–4 приведенного доказательства фактически установлено, что из каждой последовательности элементов Ω можно выбрать сходящуюся подпоследовательность, т.е. что в этой метрике Ω есть компакт. Таким образом, наша основная теорема полностью укладывается в рамки общего принципа Вейерштрасса: полунепрерывная снизу функция на компакте достигает своей нижней грани.

5 Частные случаи

Приведем некоторые условия, гарантирующие выполнение предположения П8.

1. Наиболее простое условие, которое отмечается во многих работах, и которое действительно наиболее часто выполнено в конкретных задачах, состоит в том, что $\varphi(t, x, u)$ ограничена снизу интегрируемой функцией, т.е. существует такая $l(t) \in L_1(0, \infty)$, $l(t) \ge 0$, что

$$\varphi(t, x(t), u(t)) \ge -l(t) \qquad \text{п.в. на} \quad (0, \infty)$$

для любой пары $(x,u)\in\Omega$. В этом случае имеем очевидную оценку для кусков функционала

$$\int\limits_{T'}^{T''}\varphi(t,x(t),u(t))\,dt\ \ge\ \int\limits_{T'}^{T''}-l(t)\,dt \ge \int\limits_{T'}^{\infty}-l(t)\,dt\ =-\alpha(T'),$$

и так как $\alpha(T')\to 0$ при $T'\to\infty$, то наше условие (6) выполнено.

2. Пусть все ограничения задачи не зависят от t, а функционал имеет вид

$$J=\ \beta(x(0))+\int\limits_{0}^{\infty}e^{-rt}L(x,u)\,dt\ \to\ max, \tag{10}$$

где функция L непрерывна по (x,u) и вогнута (т.е. выпукла вверх) по u; а $r-$ некоторое положительное число (оно называется показателем дисконтирования). Такие задачи характерны для динамических моделей математической экономики [1]–[7].

Предположим, что существуют такие неотрицательные числа $p,\,h,\,q,\,C,\,K$, что для всех $x\in S$, $u\in U(x)$ выполняются оценки

$$(x,f(x,u))\le p(|x|^2+h), \tag{11}$$

$$L(x,u)\le C|x|^q+K, \tag{12}$$

и пусть $p\,q<r$. Тогда функция $\varphi(t,x,u)=e^{-rt}L(x,u)$ ограничена сверху интегрируемой функцией, и следовательно, согласно п.1, для задачи максимизации предположение П8 выполнено.

Действительно, рассмотрим функцию $z(t)=|x(t)|^2+h$. Из (11) следует, что $|\dot z|\le 2\,pz$, откуда $z(t)\le z(0)\,e^{2p\,t}$ и поэтому $|x(t)|\le C_1\,e^{pt}$ с некоторой константой C_1. Тогда $L(x,u)\le C_2\,e^{pq\,t}+K$ с некоторой C_2, и отсюда

$$e^{-rt}L(x,u)\ \le\ C_2\,e^{(pq-r)t}+K\,e^{-rt}\ =l(t),$$

где функция $l(t)$ интегрируема на $(0,\infty)$, поскольку $pq-r<0$.

3. Рассмотрим также случай, когда задача имеет тот же вид, что и в п.2, но управляемая система линейна (с постоянными коэффициентами): $\dot x=Ax+Bu$, а множество управлений U не зависит от x. Пусть число p таково, что все собственные значения λ матрицы A имеют $Re\,\lambda<p$, и существуют такие неотрицательные числа $q,\,C,\,K$, что для всех $x\in S$, $u\in U$ выполняется оценка (12) и при этом $pq<r$. Тогда опять семейство функций $\varphi(t,x,u)=e^{-rt}L(x,u)$ ограничено сверху интегрируемой функцией, и следовательно, предположение П8 выполнено.

Действительно, в этом случае, как известно, найдется такая константа C_1 , что любое решение системы $\dot x=Ax+Bu$, $u\in U$ с начальным значением $x(0)\in M_0$ удовлетворяет оценке $|x(t)|\le C_1\,e^{pt}$, и далее надо повторить соответствующие рассуждения предыдущего пункта.

6 Сравнение с известными результатами

Наиболее общие результаты по данному вопросу были получены в работе Балдера [3]. Сравним его и наше предположения относительно поведения функционала на бесконечности. В указанной работе введено понятие сильной равномерной интегрируемости семейства функций и потребовано, чтобы семейство $\{\varphi^-(t,x(t),u(t))\}$ обладало этим свойством.

Пусть M – измеримое множество на прямой. Через $L_1(M)$ обозначим пространство измеримых интегрируемых по Лебегу функций, а через $L_1^+(M)$ — множество всех неотрицательных функций из $L_1(M)$.

Напомним, что множество функций $G \subset L_1(M)$ называется *равномерно интегрируемым* (на M), если $\forall\,\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что если измеримое множество $E \subset M$ имеет $mes\, E < \delta$, то $\int_E |g(t)|\,dt < \varepsilon$ для всех $g \in G$.

Определение 1 (Балдер [3]). Множество функций $G \subset L_1(M)$ называется *сильно равномерно интегрируемым*, если $\forall\,\varepsilon > 0$ существует $h \in L_1^+(M)$, такая что

$$\int\limits_{E(|g|>h)} |g(t)|\,dt < \varepsilon \qquad \text{для любой} \quad g \in G,$$

где $E(f > h) = \{\, t \in M \mid f(t) > h(t)\}$.

Нетрудно заметить, что для множества M конечной меры это свойство совпадает с равномерной интегрируемостью, а для множества бесконечной меры оно сильнее последнего свойства.

Вместо определения 1 мы будем пользоваться следующим эквивалентным определением 2, которое представляется нам более удобным.

Пусть $h,\, g \in L_1^+(M)$. Будем говорить, что h *мажорирует* g, если $h(t) \ge g(t)$ п.в. на M, и h *мажорирует* g *с интегральной точностью* $\varepsilon > 0$, если

$$\int\limits_M (g(t) - h(t))^+\,dt < \varepsilon\,.$$

Определение 2. Множество функций $G \subset L_1(M)$ назовем *сильно равномерно интегрируемым*, если $\forall\,\varepsilon > 0$ существует такая функция $h \in L_1^+(M)$, которая мажорирует $|g(t)|$ с интегральной точностью ε для любой $g \in G$.

Лемма 11. Определение 1 и определение 2 эквивалентны.

Доказательство. Без нарушения общности считаем, что $G \subset L_1^+(M)$. Так как $h \ge 0$, то всегда $g - h \le g$, следовательно,

$$\int\limits_M (g-h)^+\,dt = \int\limits_{E(g>h)} (g-h)\,dt \;\le \int\limits_{E(g>h)} g\;dt,$$

поэтому любое множество G, удовлетворяющее определению 1, удовлетворяет и определению 2.

Установим обратное. Пусть множество G удовлетворяет определению 2. Допустим, что оно не удовлетворяет определению 1, т.е. $\exists\ \varepsilon > 0$ такое, что $\forall\, h \in L_1^+(M)$ найдется $g_h \in G$, для которой

$$\int\limits_{E_h} g_h\, dt \ \geq\ \varepsilon > 0, \qquad \text{где } \ E_h = E(g_h > h). \tag{13}$$

Фиксируем это ε. По определению 2 для него существует $h_0 \in L_1^+(M)$, такое что $\forall\, g \in G$ выполнено

$$\int\limits_M (g - h_0)^+\, dt \ <\ \varepsilon/2.$$

Тогда и для всех $h \geq h_0$ выполнено

$$\int\limits_M (g - h)^+\, dt \ <\ \varepsilon/2.$$

Поэтому $\forall\, h \geq h_0$ имеем

$$\int\limits_M (g_h - h)^+\, dt \ =\ \int\limits_{E_h} (g_h - h)\, dt \ <\ \varepsilon/2\,,$$

и отсюда с учетом (13) получаем

$$\int\limits_{E_h} h\, dt \ >\ \varepsilon/2\,.$$

По определению на E_h всегда имеем $g_h - h/2 = (g_h - h) + h/2 > h/2\,,$ откуда с учетом предыдущего неравенства получаем

$$\int\limits_{E_h} (g_h - h/2)\, dt \ >\ \varepsilon/4\,,$$

и так как $E(g_h > h/2) \supset E(g_h > h) = E_h\,,$ то

$$\int\limits_{E(g_h > h/2)} (g_h - h/2)\, dt \ =\ \int\limits_M (g_h - h/2)^+\, dt \ >\ \varepsilon/4\,.$$

Полученное неравенство выполнено $\forall\, h \geq h_0\,.$ Но это противоречит определению 2, согласно которому $\exists\ h \geq h_0$ такое, что $\forall\, g \in G$

$$\int\limits_M (g - h/2)^+\, dt \ <\ \varepsilon/4\,.$$

Лемма доказана. $\square$

Рассмотрим случай $M = (0, +\infty)$. Пусть множество $\Phi \subset L_1(0,\infty)$ таково, что семейство функций $\{\varphi^- \mid \varphi \in \Phi\}$ сильно равномерно интегрируемо. Пользуясь определением 2 и равенством $a^- = (-a)^+$, нетрудно показать, что это условие эквивалентно следующему: $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, h_\varepsilon \in L_1^+(0,\infty)$ такая, что $\forall\, \varphi \in \Phi$

$$\int\limits_0^\infty (\varphi + h_\varepsilon)^-\, dt < \varepsilon.$$

Покажем, что в этом случае и наше условие о равномерной сходимости отрицательной части кусков функционала к нулю для множества Φ выполнено. Имеем при любых $T' < T''$:

$$\int\limits_{T'}^{T''} (\varphi + h_\varepsilon)^-\, dt \;\le\; \int\limits_0^\infty (\varphi + h_\varepsilon)^-\, dt < \varepsilon.$$

В силу интегрируемости $h_\varepsilon \quad \exists\, T_\varepsilon$ такое, что $\int\limits_{T_\varepsilon}^{\infty} h_\varepsilon\, dt < \varepsilon$.

Представим φ в виде $\varphi = (\varphi + h_\varepsilon) + (-h_\varepsilon)$. Так как функция $(\cdot)^-$ сублинейна, а $h_\varepsilon \ge 0$, то $\varphi^- \le (\varphi + h_\varepsilon)^- + (-h_\varepsilon)^- = (\varphi + h_\varepsilon)^- + h_\varepsilon$.

Тогда при любых $T'' > T' > T_\varepsilon$ имеем

$$\int\limits_{T'}^{T''} \varphi^-\, dt \;\le\; \int\limits_{T'}^{T''} (\varphi + h_\varepsilon)^-\, dt \;+\; \int\limits_{T'}^{T''} h_\varepsilon\, dt < \;\varepsilon + \varepsilon \;= 2\varepsilon,$$

и отсюда, опять же в силу сублинейности функции $(\cdot)^-$

$$\left(\int\limits_{T'}^{T''} \varphi\, dt \right)^- \;\le\; \int\limits_{T'}^{T''} \varphi^-\, dt \;< 2\varepsilon\,,$$

следовательно, предположение П8 для множества Φ также выполнено.

Однако обратное утверждение очевидно неверно уже потому, что функции, удовлетворяющие П8, не обязательно интегрируемы по Лебегу на $(0,\infty)$ (т.е. их интегралы не обязательно сходятся абсолютно). Например, если вместо функций $\varphi(t) \in \Phi$ рассмотреть $\varphi(t) + \frac{1}{t+1}\sin t$, то полученные функции уже не будут принадлежать $L_1(0,\infty)$, тогда как куски их интегралов по-прежнему будут удовлетворять оценке (6), поскольку

$$\int\limits_{T'}^{T''} \frac{\sin t}{t+1}\, dt \;=\; -\frac{\cos t}{t+1}\bigg|_{T'}^{T''} \;-\int\limits_{T'}^{T''} \frac{\cos t}{(t+1)^2}\, dt \;\to 0$$

при $T', T'' \to \infty$. Таким образом, требование сильной равномерной интегрируемости семейства функций, принятое в работе [3], более жесткое, чем наше требование П8.

Если даже ослабить условие работы [3], потребовав сильной равномерной интегрируемости семейства функций $\{\varphi^-(t)\}$ лишь на интервале (T,∞) при достаточно большом $T,$ то в силу тех же причин это ослабленное требование останется строго сильнее нашего условия П8.

7 Возможные обобщения

1. Если в задаче (1)–(5) присутствуют дополнительные ограничения неравенства вида

$$J_i = \beta_i(x(0)) + \int\limits_0^\infty \varphi_i(t,x,u)\,dt \le 0, \qquad i=1,\ldots,m, \tag{14}$$

где функции $\beta_i,$ φ_i удовлетворяют тем же предположениям, что и $\beta,$ φ (в том числе и предположению П8), а интеграл по $[0,\infty)$ по-прежнему понимается как предел интегралов по отрезкам $[0,T]$ при $T\to\infty,$ то ясно, что основная теорема останется верной и доказательство не изменится. Действительно, функционалы J_i будут полунепрерывны снизу на "старом" множестве Ω (не учитывающем ограничение (14)) относительно введенной сходимости, поэтому множество пар $(x,u)\in\Omega,$ удовлетворяющих ограничению (14), будет замкнутым, а тогда новое множество допустимых траекторий, задающееся теперь ограничениями (2)–(5) и (14), по-прежнему будет компактным.

2. Можно также добавить в задачу и ограничения равенства вида

$$F_j = \beta_j(x(0)) + \int\limits_0^\infty f_j(t,x,u)\,dt = 0, \qquad j=1,\ldots,k, \tag{15}$$

где функции f_j удовлетворяют предположению П1 (т.е. они непрерывны по (t,x) и линейны по u), а β_j — предположению П6 (т.е. $\beta_j(x)$ непрерывны). При этом мы потребуем, чтобы функции f_j и $-f_j$ удовлетворяли предположению П8, т.е. чтобы

$$\int\limits_{T'}^{T''} f_j(t,x(t),u(t))\,dt \to 0 \qquad \text{при} \qquad T',T''\to\infty$$

равномерно по "старому" множеству $\Omega.$ Последнее условие эквивалентно тому, что для любой допустимой пары интегралы в (15) имеют конечные значения, причем они сходятся к своим значениям равномерно по всем допустимым траекториям. В этой ситуации опять основная теорема останется справедливой, так как множество пар $(x,u)\in\Omega,$ удовлетворяющих (15), замкнуто относительно введенной сходимости.

Ограничение (15) позволяет рассматривать финальные ограничения равенства на конец траектории $x(\infty) = \lim_{T\to\infty} x(T)$ типа

$$(a_j, x(\infty)) = c_j, \qquad j = 1, \ldots, k,$$

где $a_j \in \mathbb{R}^n$, которые в эквивалентной форме могут быть представлены в виде

$$(a_j, x(0)) \; + \int_0^\infty (a_j, f(t, x(t), u(t)))\, dt \; = c_j, \qquad j = 1, \ldots, k\,.$$

Здесь надо предполагать, что функции $\pm(a_j, f(t,x,u))$ удовлетворяют П8.

3. Задача, в которой вместо управляемой системы имеется дифференциальное включение $\dot{x} \in V(t,x)$, где многозначное отображение V удовлетворяет предположению П4, легко сводится к рассмотренной. Для этого надо перейти к системе $\dot{x} = u$, $u \in V(t,x)$.

4. В настоящей статье мы предполагали, что система (2) линейна по управлению, а множество $U(t,x)$ есть выпуклый компакт. В случае общей нелинейной системы надо требовать, чтобы это множество было ограниченным, а выпуклым и замкнутым было множество скоростей расширенной системы [10, 3]:

$$\dot{y} = \varphi(t,x,u) + v, \quad \dot{x} = f(t,x,u), \qquad u \in U(t,x), \quad v \geq 0\,;$$

при этом надо рассматривать сходимость траекторий $(y(t),\, x(t))$ в пространстве $C[0,T] \times C^n[0,T]$, а для представления предельной траектории в виде решения указанной системы при некотором управлении $(u(t),\, v(t))$ применять один из вариантов теоремы об измеримом выборе, например, лемму Филиппова о включении [8].

Мы не стали рассматривать этот общий случай, так как соответствующие технические усложнения касаются задачи на фиксированном отрезке (и они хорошо известны), а нашей целью было как можно более четко выделить специфику задачи на бесконечном интервале. Отметим лишь, что этот общий случай укладывается в предлагаемую ниже абстрактную схему.

8 Абстрактная схема

Изложенная выше схема доказательства проходит и в следующей абстрактной постановке.

Пусть имеется возрастающее счетное семейство множеств $T_n \subset T_{n+1} \subset \ldots$, $n = 1, 2, \ldots$, и пусть $\Re = \bigcup T_n$. На каждом T_n задано некоторое множество функций $\Omega(T_n) = \{\, w : T_n \to Z \,\}$, принимающих значения в некотором множестве образов Z, и задан функционал $J_n : \ \Omega(T_n) \to \mathbb{R}$. Предполагается, что $\forall\, n \ \ \Omega(T_{n+1})|_{T_n} \subset \Omega(T_n)$.

Пусть Ω есть множество всех функций $w : \Re \to Z$ таких, что $\forall\, n$ сужение $w_n = w\,|_{T_n}$ принадлежит $\Omega(T_n)$. Тогда для каждой функции $w \in \Omega$ определены функционалы $J_n(w) = J_n(w_n)$, $n = 1, 2, \ldots$, и поэтому можно рассматривать функционал $J(w) = \lim\limits_{n\to\infty} J_n(w_n)$. Точнее, он рассматривается лишь на множестве тех $w \in \Omega$, для которых этот предел (конечный или бесконечный) существует.

Ставится задача: $J(w) \to min$ по всем $w \in \Omega$, для которых функционал существует.

Предположения:

S1) Для каждого n множество функций $\Omega(T_n)$ есть компакт относительно некоторой топологии τ_n, имеющей счетную базу (и значит, метризуемой); при этом отображение $\pi_n : \Omega(T_{n+1}) \to \Omega(T_n)$, ставящее в соответствие каждой функции $w(t)$ на множестве T_{n+1} ее сужение на T_n, непрерывно;

S2) Для каждого n функционал J_n полунепрерывен снизу на $\Omega(T_n)$ относительно топологии τ_n;

S3) Существует числовая последовательность $\alpha_N \to 0+$ и номер N_0 такие, что $\forall\, N > N_0$ и $\forall\, n_2 > n_1 \geq N, \ \ \forall\, w \in \Omega$

$$J_{n_2}(w) - J_{n_1}(w) \ \geq \ -\alpha_N\,,$$

или, что то же самое, $(J_{n_2}(w) - J_{n_1}(w))^- \to 0$ при $n_1, n_2 \to \infty$ $(n_1 < n_2)$ равномерно по всем $w \in \Omega$.

Таким образом, в этой абстрактной схеме роль кусков функционала играют разности $J_{n_2}(w) - J_{n_1}(w)$.

При сделанных предположениях справедлив аналог леммы 2, гарантирующий существование предела функционала (как и раньше, либо конечного, либо $+\infty$) на любой $w \in \Omega$, множество Ω есть метризуемый компакт в топологии сходимости на каждом T_n, функционал J полунепрерывен снизу на Ω относительно этой сходимости, и верна следующая

Теорема 2. Пусть существует $w \in \Omega$, на которой $J(w) < +\infty$. Тогда поставленная задача имеет решение, т.е. J достигает своего минимума на Ω.

Доказательство повторяет основные пункты доказательства теоремы 1.

Можно предложить и еще более абстрактную схему, в которой множеств T_n нет, а вместо пространств функций $\Omega(T_n)$ рассматривается произвольное проективное семейство компактов Ω_n со счетными базами, и Ω есть проективный предел этого семейства. Однако для такой постановки (и тем более при отказе от счетности баз у топологий τ_n) пока нет достаточно убедительной мотивировки, поэтому мы здесь детально ее не рассматриваем.

Авторы выражают благодарность Б.А.Копейкину за полезные обсуждения. Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ, проект 04-01-00482.

Список литературы

[1] R.F.Baum, Existence theorems for Lagrange control problems with unbounded time domain // J. of Optimization Theory and Appl., 1976, v.19, 89–116.

[2] M.Magill, Infinite horizon programs // Econometrica, 1981, v. 49, p. 679–711.

[3] E.J.Balder, An existence result for optimal economic growth problems // J. of Math. Analysis and Applications, 1983, v. 95, 195–213.

[4] D.A.Carlson, A.B.Haurie, A.Leizarowitz, "Infinite-horizon optimal control", Springer, Berlin, 1991.

[5] D.Leonard, N.V.Long, "Optimal control theory and static optimization in economics", Cambrige Univ. Press, 1992.

[6] A.J.Zaslavski, Optimal programs on infinite horizon // SIAM J. Control and Optimization, 1995, v. 33, No.6, p. 1643–1660, 1661–1686.

[7] A.J.Zaslavski, Turnpike property of optimal solutions of infinite-horizon variational problems // SIAM J. Control and Optimization, 1997, v. 35, No.4, 1169–1203.

[8] А.Ф.Филиппов, О некоторых вопросах теории оптимального регулирования // Вестник МГУ, сер. матем., мех., астрон., физ., хим., 1959, №2, с. 25–32.

[9] А.Д.Иоффе, В.М.Тихомиров, "Теория экстремальных задач", М.: Наука, 1974.

[10] L.Cesari, "Optimization: Theory and Applications", Springer, New-York, 1983.

[11] C.Olech, Weak lower semicontinuity of integral functions // J. of Optimization Theory and Appl., 1976, v.15, 3–16.

[12] A.D.Ioffe, On lower semicontinuity of integral functions // SIAM J. on Control and Optimization, 1977, v.15, 521–538.

[13] А.Н.Колмогоров, С.В.Фомин, "Элементы теории функций и функционального анализа", М.: Наука, 1968.