Аппроксимационная теорема для нелинейной управляемой системы со скользящими режимами [1]

А.В. Дмитрук [2]

Рассматривается вопрос о корректности расширения нелинейной управляемой системы путем введения т.н. скользящих режимов (т.е. овыпуклення множества возможных скоростей) при наличии ограничений на концы траектории. Доказано, что траекторию расширенной системы можно приблизить траекториями исходной при условии, что ограничения равенства расширенной системы в первом порядке невырождены. Доказательство основано на некоторой нелокальной оценке расстояния до множества нулей нелинейного оператора, задающего расширенную систему, и использует специальный итерационный процесс поправок.

1. Постановка вопроса

На фиксированном отрезке времени $[0,T]$ рассмотрим управляемую систему

$$\dot{x} - f(x,u,t) = 0, \tag{1}$$

$$g(x,u,t) = 0, \tag{2}$$

$$K(x(0),x(T)) = 0, \tag{3}$$

где $x(t)-$ фазовая переменная, $u(t)-$ управление, $x \in AC^m[0,T]$ ($m-$ мерная абсолютно непрерывная), $u \in L^r_\infty[0,T]$ ($r-$ мерная измеримая ограниченная). Траектории уравнения (1) подчинены смешанному ограничению (2) размерности $dim\, g = q$ и ограничению на концы (3) размерности $dim\, K = s$. Будем предполагать, что функция K аргумента $p = (x_0,\, x_T) \in \mathbf{R}^{2m}$ определена и непрерывно дифференцируема на некотором открытом множестве $\mathcal{P} \subset \mathbf{R}^{2m}$, а функции f, g определены и непрерывны вместе со своими первыми производными по x, u на некотором открытом множестве $\mathcal{Q} \subset \mathbf{R}^{m+r+1}$.

Пусть $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\mathcal{P},\mathcal{Q})$ есть множество всех пар функций $(x(t),u(t))$ из пространства $AC^m[0,T] \times L^r_\infty[0,T]$, для каждой из которых существует свой компакт $\Gamma \subset \mathcal{Q}$ такой что $(x(t),u(t),t) \in \Gamma$ п.в. на $[0,T]$, и при этом $(x(0),x(T)) \in \mathcal{P}$. Решением системы (1)–(3) будем называть любую пару функций $(x,u) \in \mathcal{D}$, для которой почти всюду на $[0,T]$ выполнены равенства (1)–(2) и выполнено (3).

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект 04-01-00482, и Программы по ведущим научным школам, проект НШ-5813.2006.1.

[2]Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики, кафедра оптимального управления, dmitruk@member.ams.org

Вместе с системой (1)–(3) будем рассматривать также расширенную систему с т.н. *скользящими режимами*

$$\dot{x} - \sum_{i=1}^{N} \alpha^i(t) f(x, u^i, t) = 0, \tag{4}$$

$$g(x, u^i, t) = 0, \quad i = 1, \ldots, N, \tag{5}$$

$$\sum_{i=1}^{N} \alpha^i(t) - 1 = 0, \tag{6}$$

$$K(x(0), x(T)) = 0, \tag{7}$$

где N – некоторое фиксированное натуральное число, все $u^i \in L_\infty^r$, $\alpha^i \in L_\infty^1$, причем п.в. $\alpha^i(t) \ge 0$, $i = 1, \ldots, N$. Управлениями в ней являются как функции $u^i(t)$, так и "весовые коэффициенты" $\alpha^i(t)$. Для краткости введем обозначения $p = (x(0), x(T))$, $\mathbf{u} = (u^1, \ldots, u^N)$, $\alpha = (\alpha^1, \ldots, \alpha^N)$, где все $u^i \in L_\infty^r$, $\alpha^i \in L_\infty$.

Понятие решения этой системы естественным образом модифицируется из понятия решения системы (1)–(3) (см. ниже).

Вектор-функция $\alpha(t) = (\alpha^1(t), \ldots, \alpha^N(t)) \in L_\infty^N\,[0, T]$ принимает значения в симплексе

$$A = \; \{ \,\alpha \in \mathbf{R}^N \;|\; \forall i \quad \alpha^i \ge 0, \quad \sum_{i=1}^{N} \alpha^i = 1 \,\}. \tag{8}$$

Множество вершин этого симплекса обозначим $ex\, A$, так что $\alpha \in ex\, A$ означает, что α есть базисный вектор e^i пространства $\mathbf{R}^N$ при некотором i.

Из теоремы Каратеодори следует, что при $N \ge n$ множество скоростей в этой системе в каждой точке (x, t) есть овыпукление множества скоростей системы (1)–(3) (а выпуклость множества скоростей играет важную роль, например, для установления существования решения в оптимизационных задачах с такими системами), но для нас условие $N \ge n$ несущественно, и мы не будем его предполагать.

Ясно, что любую траекторию $x(t)$ системы (1)–(3), порожденную управлением $u(t)$, можно также рассматривать как траекторию системы (4)–(7), порожденную набором управлений $u^1(t) = u(t)$, произвольными $u^2(t)$, $\ldots$, $u^N(t)$, и весовыми коэффициентами $\alpha(t) = (1, 0, \ldots, 0)$. В этом смысле множество решений системы (1)–(3) естественным образом вкладывается в множество решений системы (4)–(7). Обратного вложения конечно же нет: произвольная траектория $x(t)$ системы (4)–(7), вообще говоря, не является траекторией системы (1)–(3).

Возникает вопрос: когда переход к расширенной системе корректен, т.е. когда заданное решение системы (4)–(7) может быть в каком-то смысле приближено решениями исходной системы (1)–(3)?

Естественная попытка решить этот вопрос состоит в следующем. Рассмотрим сначала случай, когда равенства (2) и соответственно (5) отсутствуют. Пусть дано решение системы (4)–(7). Зафиксируем управления $u^1(t), \ldots, u^N(t)$, и рассмотрим последовательность наборов весовых коэффициентов $\alpha_n(t) \in ex\,A$, слабо-* сходящихся к данному набору коэффициентов $\alpha(t) \in A$, т.е. $\alpha_n^i(t) \xrightarrow{\text{сл-*}} \alpha^i(t) \;\; \forall\, i = 1, \ldots, N$. (Такая последовательность всегда имеется, ее нетрудно построить конструктивно.) Положим $x_n(0) = x(0)$. Тогда с учетом линейности уравнения (4) относительно α мы получим последовательность решений этого уравнения $x_n(t)$, сходящихся к данному $x(t)$ равномерно на отрезке $[0,T]$. Если функция K не зависит от $x(T)$ (т.е. конец $x(T)$ свободен), то, полагая $u_n(t) = \sum_{i=1}^N \alpha_n^i(t)\, u_n^i(t)$, мы получим последовательность пар $(x_n(t), u_n(t))$, удовлетворяющих системе (1)–(3) (в инженерных приложениях такие последовательности называются скользящими режимами), и тем самым поставленный вопрос будет успешно разрешен. В случае присутствия равенств (2) и (5), предполагая невырожденность производной g_u' вдоль данной траектории и пользуясь теоремой о неявной функции, часть управлений можно выразить через оставшиеся свободные управления и фазовую переменную, и таким образом, эти равенства можно исключить и свести дело к рассмотренному случаю. Описанный метод использовался фактически еще Н.Н. Боголюбовым (см. [4]), Л. Янгом [2], Дж. Макшейном [3], а после знаменитой статьи Р.В. Гамкрелидзе [1] он стал стандартным аппаратом в теории управления и многократно применялся в работах различных авторов (см. напр. [5] – [12]).

Однако, если функция K зависит от обоих концов траектории (напр. $x(0) = a, \quad x(T) = b$, т.е. концы закреплены), то для построенных траекторий, вообще говоря, $K(x_n(0), x_n(T)) \neq 0$, так что пара (x_n, u_n) не удовлетворяет системе (1)–(3), и поэтому данный метод не работает, требуется какая-то его коррекция.

2. Предварительные факты и основной результат

1. Мы предлагаем следующий подход. Будем рассматривать ограничения (4)–(7) как равенство нулю некоторого оператора F, действующего из банахова пространства $W = AC^m \times (L_\infty^r)^N \times L_\infty^N\,[0,T]$ с элементами $w = (x, \mathbf{u}, \alpha)$ и нормой $||w|| = ||x||_{AC} + ||\mathbf{u}||_\infty + ||\alpha||_\infty$, где $||x||_{AC} = |x(0)| + ||\dot{x}||_1$, в пространство $Z = L_1^m \times (L_\infty^q)^N \times L_\infty\,[0,T] \times \mathbf{R}^s$ с элементами $z = (\xi, \eta, \nu, \kappa)$, где $\eta = (\eta^1, \ldots, \eta^N)$, все $\eta^i \in L_\infty^q$, и нормой $||z|| = ||\xi||_1 + ||\eta||_\infty + ||\nu||_\infty + |\kappa|$.

В пространстве W определим множество $\mathcal{D}_N = \mathcal{D}_N(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$, состоящее из всех троек $(x, \mathbf{u}, \alpha)$, таких что $\forall\, i = 1, \ldots, N$ пара $(x, u^i) \in \mathcal{D}(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$. Решением системы (4)–(7) будем называть любую тройку функций $(x, \mathbf{u}, \alpha) \in \mathcal{D}_N$, для которой почти всюду на $[0,T]$ выполнены равенства (4)–(6) и выполнено (7).

Оператор F задается левыми частями равенств (4)–(7). Он очевидно дифференцируем по Фреше в любой точке $(x, \mathbf{u}, \alpha) \in \mathcal{D}_N$, и его производная

$$F'(x, \mathbf{u}, \alpha) = \; G[x, \mathbf{u}, \alpha]: \;\; W \longrightarrow Z$$

действует следующим образом: $(\bar x, \bar{\mathbf{u}}, \bar\alpha) \mapsto (\bar\xi, \bar\eta, \bar\kappa, \bar\nu)$, где

$$\dot{\bar x} - \sum \alpha^i f'_x(x,u^i,t)\,\bar x - \sum \alpha^i f'_u(x,u^i,t)\,\bar u^i - \sum \bar\alpha^i f(x,u^i,t) \;=\; \bar\xi,$$
$$g'_x(x,u^i,t)\,\bar x + g'_u(x,u^i,t)\,\bar u^i \;= \bar\eta^i, \qquad i=1,\dots,N,$$
$$\sum \bar\alpha^i(t) \;=\; \bar\nu.$$
$$K'_{x(0)}(p)\,\bar x(0) + K'_{x(T)}(p)\,\bar x(T) \;= \bar\kappa,$$

Ясно, что линейный оператор $G[x,\mathbf{u},\alpha]$ непрерывно зависит от точки $(x,\mathbf{u},\alpha)$ в операторной норме, т.е. F непрерывно дифференцируем на $\mathcal{D}_N$.

Пусть $\mathcal{M}$ есть множество нулей оператора $F,$ т.е. множество всех троек $(x,\mathbf{u},\alpha)\in W,$ удовлетворяющих равенствам (4)–(7). Основной факт, на который мы будем опираться, состоит в следующей оценке расстояния до множества $\mathcal{M}$.

Теорема 1. *Пусть тройка $w_0 = (x_0,\mathbf{u}_0,\alpha_0)\in\mathcal{M}$ такова, что оператор $F'(w_0)$ действует "на". Пусть $\mathcal{A}\subset L^N_\infty[0,T]$ есть произвольное ограниченное множество. Тогда существуют числа $\varepsilon>0,$ B и слабая-* окрестность $\mathcal{V}(\alpha_0),$ такие что для любой тройки $w=(x,\mathbf{u},\alpha),$ удовлетворяющей условиям*

$$||x-x_0||_C<\varepsilon, \qquad ||\mathbf{u}-\mathbf{u}_0||_\infty<\varepsilon, \tag{8}$$

$$\alpha\in\mathcal{V}(\alpha_0)\cap\mathcal{A}, \tag{9}$$

выполнена оценка

$$\operatorname{dist}(w,\mathcal{M}) \;\le\; B\,||F(w)||\,. \tag{10}$$

Отметим, что эта оценка имеет нелокальный характер: α берется не из обычной окрестности α_0 , а из более широкой слабой-* окрестности. Доказательство теоремы 1 дано автором в [19], [20], [21, Глава 5]; оно основано на абстрактном обобщении классической теоремы Люстерника, предложенном А.А. Милютиным (см. [16, 20, 21]), которое представляет интерес и как самостоятельный факт функционального анализа, являющийся весьма эффективным инструментом при работе с нелинейными равенствами.

Мы будем применять теорему 1 для случая, когда $\mathcal{A}$ есть множество функций $\alpha(t)\in L^N_\infty[0,T],$ принимающих свои значения в вышеуказанном симплексе $A.$

2. Кроме теоремы 1, нам потребуются еще два факта. Первый из них основан на одном специфическом свойстве нормы пространства $L_1[0,T].$ Для краткости обозначим $\Delta=[0,T].$

Будем здесь считать, что A есть произвольный замкнутый ограниченный многогранник в $\mathbf{R}^N.$ Множество всех вектор-функций $\alpha(t)$ из $L^N_1(\Delta),$ значения которых $\alpha(t) \in A$ почти всюду на Δ, обозначим $\mathcal{A}$. Через $ex\, A$ обозначим множество вершин многогранника A.

Лемма 1 (об L_1- расстоянии до почти вершин многогранника).
Пусть измеримая функция $e(t) \in ex\, A$ п.в. на Δ, и функция $\alpha \in \mathcal{A}$ такова, что $\int |\alpha(t) - e(t)|\, dt \le \delta$, где $\delta > 0$. Пусть дана последовательность функций $\alpha_n \in \mathcal{A}$, слабо сходящаяся к α (т.е. $\alpha_n^i \xrightarrow{\text{сл}} \alpha^i \quad \forall\, i = 1, \ldots, N$ относительно функций из L_∞). Тогда при больших n

$$|| \, \alpha_n - \alpha \, ||_1 \; \le \; C\delta, \tag{11}$$

где константа C зависит только от многогранника A и не зависит от функций $\alpha_n(t)$, $\alpha(t)$.

Доказательство. Учитывая конечность числа вершин многогранника, можно считать, что данная вершина постоянна: $e(t) \equiv e \in ex\, A$. Рассмотрим сначала простейший частный случай, в котором доказательство совершенно прозрачно.

Пусть $N = 1, \quad A = [0, 1], \quad e = 0$. Тогда по условию функция $\alpha(t) \in [0, 1]$ такова, что $\int \alpha(t)\, dt \le \delta$, а последовательность $\alpha_n(t)$ такова, что

$$0 \le \alpha_n(t) \le 1, \qquad \text{и} \qquad \alpha_n \xrightarrow{\text{сл}} \alpha.$$

Ключевой факт состоит в том, что для неотрицательных функций $\bar\alpha(t) \ge 0$ норма пространства $L_1(\Delta)$ есть линейный функционал:

$$|| \, \bar\alpha \, ||_1 \; = \; \int_\Delta \bar\alpha(t)\, dt.$$

Из этого соображения и условия леммы получаем

$$||\alpha_n - \alpha||_1 \; \le \; ||\alpha_n||_1 + ||\alpha||_1 \; = \; \int \alpha_n\, dt + \int \alpha\, dt =$$

$$= \int (\alpha_n - \alpha)\, dt \; + \; 2\int \alpha\, dt \; < 3\delta$$

при больших n. (Предпоследний интеграл меньше δ в силу сходимости $\alpha_n - \alpha \xrightarrow{\text{сл}} 0$.)

Для доказательства в общем случае надо заметить, что для данного многогранника и любой его вершины e всегда найдутся число $\gamma > 0$ и единичный вектор $p \in \mathbf{R}^N$ такие, что для всех $a \in A$ имеется оценка $|\, a - e \,| \le \gamma\, (p, a - e)$ (это вытекает из того, что касательный конус к многограннику в любой его вершине является острым). Тогда

$$||\alpha_n - \alpha||_1 \le ||\alpha_n - e||_1 + ||\alpha - e||_1 \le$$

$$\le \gamma \int (p, \alpha_n - e)\, dt + \gamma \int (p, \alpha - e)\, dt =$$

$$= \gamma \int (p, \alpha_n - a)\, dt + 2\gamma \int (p, \alpha - e)\, dt <$$
$$< \delta + 2\gamma ||\alpha - e||_1 < (1 + 2\gamma)\, \delta.$$

Осталось положить $C = 1 + 2\gamma$. Лемма доказана. $\square$

Мы будем применять эту лемму для случая, когда A есть симплекс (8).

Отметим полезное следствие из леммы 1, хотя в данной статье оно нам и не понадобится.

Теорема 2. *Пусть, как и выше, $A -$ выпуклый многогранник в $\mathbf{R}^N$. Пусть почти всюду $\alpha(t) \in ex\, A$, $\alpha_n(t) \in A$ и $\alpha_n \xrightarrow{сл} \alpha$. Тогда $||\alpha_n - \alpha||_1 \to 0$.*

Таким образом, если последовательность функций принимает значения в выпуклом многограннике и слабо сходится к его вершинам, то она сходится к ним по норме L_1.

Для доказательства надо лишь заметить, что условие леммы 1 здесь выполнено с любым $\delta > 0$, и тогда из оценки (11) вытекает требуемая сходимость.

Для произвольного выпуклого компакта и $ex\, A$ $-$ множества его крайних точек теорема 2 была доказана в [14, 15].

3. Еще один нужный нам факт относится к управляемым системам, линейным по управлению:

$$\dot{x} = f(x,t) + G(x,t)\, v. \tag{12}$$

Будем считать, что $x \in \mathbf{R}^m$, $v \in \mathbf{R}^k$, вектор-функция f и матрица G со своими производными f_x, G_x определены и непрерывны на некотором открытом множестве $\mathcal{R} \subset \mathbf{R}^{m+1}$.

Пусть задана пара функций $(x_0, v_0) \in AC^m[0,T] \times L_1^k[0,T]$, такая что $(x_0(t), t) \in \mathcal{R}$ всюду на $[0,T]$, удовлетворяющая уравнению (12). Положим $x_0(0) = a_0$.

Лемма 2. *Пусть дана последовательность функций $v_n \in L_1^k[0,T]$, такая что $v_n \xrightarrow{сл} v_0$ (слабо относительно $L_\infty^k[0,T]$), и задана последовательность векторов $a_n \in \mathbf{R}^m$, такая что $a_n \to a_0$. Тогда для достаточно больших n уравнение (12) при $v = v_n(t)$ и начальном условии $x_n(0) = a_n$ имеет на $[0,T]$ решение $x_n(t)$, и при этом $x_n(t) \Longrightarrow x_0(t)$ равномерно на $[0,T]$.*

Кратко этот факт можно сформулировать так: если система линейна по управлению и управления сходятся слабо, то соответствующие фазовые переменные сходятся равномерно. Данный факт, по-видимому, известен, но конкретную ссылку на доказательство мы не знаем, поэтому дадим его здесь.

Доказательство. Поскольку график траектории $x_0(t)$ есть компакт, содержащийся в $\mathcal{R}$, то при некотором $\varepsilon > 0$ его замкнутая $\varepsilon-$ окрестность также содержится в $\mathcal{R}$. Без нарушения общности считаем, что в этой $\varepsilon-$ окрестности функции f, G равномерно ограничены и липшицевы по x с общей для всех t константой K.

Из общих теорем существования решений дифференциальных уравнений вытекает, что $\forall\, n$ в некоторой окрестности $\mathcal{O}_n$ точки $t_0 = 0$ уравнение (12) при $v = v_n(t)$ и начальном условии $x_n(0) = a_n$ имеет решение $x_n(t)$, оно единственно и продолжается на некоторый отрезок $\Delta_n = [t_0,\, t_0 + \delta_n] -$ по крайней мере до тех пор, пока оно остается в $\varepsilon-$ трубке вокруг траектории $x_0(t)$. Оценим длину этого отрезка.

Положим $x_n = x_0 + \bar{x}_n\,,\;\; v_n = v_0 + \bar{v}_n\,,\;\; a_n = a_0 + \bar{a}_n\,.$

По условию $\bar{v}_n \xrightarrow{\text{сл}} 0,\;\; \bar{a}_n \to 0,$ и на Δ_n выполнены уравнения:

$$\dot{x}_0 = f(x_0, t) + G(x_0, t)\, v_0\,, \qquad x_0(t_0) = a_0\,,$$

$$(x_0 + \bar{x}_n)^{\bullet} = f(x_0 + \bar{x}_n, t) + G(x_0 + \bar{x}_n, t)(v_0 + \bar{v}_n)\,, \qquad x_n(t_0) = a_0 + \bar{a}_n\,.$$

Тогда $\bar{x}_n$ удовлетворяет на Δ_n уравнению

$$\dot{\bar{x}}_n = \Gamma(\bar{x}_n, t) + \Lambda(\bar{x}_n, t)\, v_n + G(x_0, t)\, \bar{v}_n\,, \qquad \bar{x}_n(t_0) = \bar{a}_n\,, \tag{13}$$

где функции

$$\Gamma(\bar{x}, t) = f(x_0(t) + \bar{x}, t) - f(x_0(t), t), \qquad \Lambda(\bar{x}, t) = G(x_0(t) + \bar{x}, t) - G(x_0(t), t),$$

при $|\bar{x}| \le \varepsilon$ удовлетворяют оценкам $|\Gamma(\bar{x}, t)| \le K|\bar{x}|, \qquad |\Lambda(\bar{x}, t)| \le K|\bar{x}|.$

Чтобы оценить $|\bar{x}_n|,$ перейдем к интегральной форме уравнения (13). Заметим сначала, что так как $\bar{v}_n \xrightarrow{\text{сл}} 0$ в L_1 относительно $L_\infty\,,$ то согласно критерию Данфорда–Петтиса [13] семейство функций $\bar{v}_n$ имеет общий модуль абсолютной непрерывности интеграла Лебега, т.е. имеется функция $\mu : (0, \infty) \to (0, \infty),$ $\mu(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0+,$ такая что для любого множества $E \subset [0, T],\;\; mes\, E \le \delta,$

$$\forall\, n \qquad \int_E |\bar{v}_n|\, dt \le \mu(\delta).$$

Можно считать, что μ монотонна и непрерывна, и что она годится также и для функции $v_0(t)$.

Рассмотрим интеграл от последнего члена в (13): $\;\forall\, t \in [0, T]$

$$h_n(t) = \int_0^t G(x_0(\tau), \tau)\, \bar{v}_n(\tau)\, d\tau.$$

Так как $|G(x_0(\tau), \tau)| \le K,\;$ а $\bar{v}_n \xrightarrow{\text{сл}} 0,$ то $h_n(t) \to 0\;\;\forall\, t \in [0, T].$

Кроме того, так как $\;\forall\, t',\, t'' \in [0, T]$

$$|h_n(t'') - h_n(t')| \le\; K \int_{t'}^{t''} |\bar{v}_n(\tau)|\, d\tau \;\le\; K\mu(t'' - t'),$$

то функция $K\mu(\delta)$ является общим модулем непрерывности для всех функций $h_n(t)$ на $[0,T]$, а тогда из поточечной сходимости $h_n(t) \to 0$ вытекает равномерная сходимость $h_n(t) \Longrightarrow 0$ на $[0,T]$.

Уравнение (13) в интегральной форме имеет вид:

$$\bar{x}_n(t) = \bar{a}_n + \int_0^t \left(\Gamma(\bar{x}_n,\tau) + \Lambda(\bar{x}_n,\tau)\, v_n\right) d\tau \; + h_n(t).$$

Тогда $\max|\bar{x}_n(t)|$ на $\Delta_n = [t_0,\, t_0+\delta_n]$ оценивается так:

$$||\bar{x}_n||_C \le \; K\,||\bar{x}_n||_C\, \delta_n + ||\bar{x}_n||_C\, 2\mu(\delta_n) + \; |\bar{a}_n| + ||h_n||_C \;.$$

Следовательно,

$$||\bar{x}_n||_C\,(1 - K\delta_n - 2\mu(\delta_n)) \le \; |\bar{a}_n| + ||h_n||_C \; \to 0. \tag{14}$$

Нам осталось добиться того, чтобы коэффициент при $||\bar{x}_n||_C$ был отделен от нуля. Для этого положим все $\delta_n = \hat{\delta}$, где $\hat{\delta} > 0$ есть решение уравнения $K\hat{\delta} + \mu(\hat{\delta}) = 1/2$. Ясно, что таковое существует (и единственно). Тогда из оценки (14) следует, что при достаточно больших n на общем отрезке $\hat{\Delta} = [t_0,\, t_0+\hat{\delta}]$ будем иметь

$$\frac{1}{2}\,||\bar{x}_n||_C \le \; |\bar{a}_n| + ||h_n||_C \; \to 0,$$

поэтому решение уравнения (13) существует на $\hat{\Delta}$, остается в трубке $|\bar{x}| \le \varepsilon$, и более того, равномерно сходится к нулю. В частности, $\bar{x}(t_0+\hat{\delta}) \to 0$.

Примем теперь за начальную точку $t_1 = t_0 + \hat{\delta}$ и перейдем к следующему отрезку $[t_1,\, t_1+\hat{\delta}]$ той же длины $\hat{\delta}$. Так как все приведенные выше оценки справедливы и на новом отрезке, то и на нем решение уравнения (13) существует и равномерно сходится к нулю. Примем далее за начальную точку $t_2 = t_1 + \hat{\delta}$, и т.д. За конечное число шагов мы таким образом пройдем весь отрезок $[0,T]$. Лемма доказана. $\square$

Замечание. Из доказательства видно, что от функций f, G не надо требовать гладкости по x и непрерывности по t; достаточно предполагать, что они равномерно ограничены на $\mathcal{R}$, измеримы по t и равномерно липшицевы по x с общей для почти всех t константой.

Лемма 2 доказана здесь для самой слабой (из "стандартных") сходимости функций v_n. Если, например, $v_n \in L_\infty$ и сходятся к v_0 слабо-* (т.е. относительно функций из L_1), то тем более данные v_n принадлежат L_1 и сходятся к v_0 слабо относительно функций из L_∞, поэтому лемма 2 справедлива и в этом случае. Именно для такого случая мы ниже и будем ее применять.

4. Отметим попутно еще один интересный факт, связанный с линейным оператором $F'(w)$. Пусть он действует "на". Тогда его вторая компонента (т.е. отображение $(\bar{x},\bar{u}) \longmapsto g_x\,\bar{x} + g_u\,\bar{u}$) также действует "на". Что в этом случае можно сказать о матрицах g_x и g_u (считая, что они измеримы и ограничены)? Оказывается, матрица g_x может быть совершенно произвольной, а $g_u(x(t),u(t),t)$ обязательно должна иметь полный ранг равномерно по t. Это как раз то условие, которое всегда предполагается выполненным для ограничения $g(x,u,t)=0$ при включении его в задачу на экстремум.

Сформулируем этот факт в следующем общем виде. Рассмотрим оператор $P:\ C^m(\Delta)\times L^r_\infty(\Delta)\to L^q_\infty(\Delta)$, действующий по правилу

$$(\bar{x},\bar{u})\mapsto\ \Gamma(t)\,\bar{x}(t)+\Lambda(t)\,\bar{u}(t)\ =\bar{\eta}\in L^q_\infty(\Delta)\,, \tag{15}$$

где матрицы Γ и Λ размерностей $q\times m$ и $q\times r$ измеримы и существенно ограничены. (Здесь $C^m(\Delta)$ есть пространство $m-$ мерных непрерывных функций на отрезке Δ.) Пусть B_ρ обозначает шар радиуса ρ с центром в нуле в соответствующем пространстве .

Лемма 3. *Оператор P сюрьективен тогда и только тогда, когда матрица $\Lambda(t)$ имеет полный ранг равномерно по t, т.е. она имеет существенно ограниченную правую обратную матрицу, или, что то же самое: $\exists\,\delta>0$ такое что $\Lambda(t)B_1\supset B_\delta$ п.в. на Δ.*

Еще одно эквивалентное требование: $det\,(\Lambda(t)\,\Lambda^*(t))\geq const>0.$

Доказательство. Достаточность указанного условия для сюрьективности очевидна. Нетривиальное утверждение здесь — необходимость.

Рассмотрим сначала случай $m=r=q=1$, т.е. когда

$$P(\bar{x},\bar{u})=\ \gamma(t)\,\bar{x}+\lambda(t)\,\bar{u}\ \in L_\infty(\Delta),$$

где γ и λ — скалярные функции. Так как P есть оператор "на", то при некотором $a>0$

$$P\,(B^C_1\times B^{L_\infty}_1)\ \supset\ B^{L_\infty}_a\ . \tag{16}$$

Мы хотим показать, что $vraimin\,|\lambda(t)|\ >\ 0.$ Допустим противное: $vraimin\,|\lambda(t)|=0.$ Тогда $|\lambda(t)|\leq a/3$ на некотором множестве E положительной меры. Обратимся к функции $\gamma:$ согласно $C-$ свойству Лузина, E содержит замкнутое множество M положительной меры, на котором она непрерывна. Сузим пространства C и L_∞ на это множество M. Очевидно, включение (16) останется верным и для этих суженных пространств.

Возьмем произвольную разрывную функцию $\hat{\eta}\in L_\infty(M)$ с условием $||\hat{\eta}||_\infty\leq a$, имеющую колебание $>a$ в некоторой точке $\theta\in M$ (т.е. $\limsup_{t\to\theta}\hat{\eta}(t)-\liminf_{t\to\theta}\hat{\eta}(t)>a$; отсюда в частности следует, что θ не изолирована в M). Тогда шар $B_{a/3}(\hat{\eta})$ очевидно содержит только разрывные функции (поскольку их колебания в θ больше $a/3$), и поэтому он не имеет общих точек с множеством

$$\Phi=\ \{\,\bar{\varphi}(t)=\gamma(t)\,\bar{x}(t)\ |\ \ \bar{x}\in C(M),\ \ ||\bar{x}||_C\leq 1\},$$

ибо последнее целиком состоит из непрерывных функций. Но в силу (16)

$$\hat{\eta} = \bar{\varphi} + \lambda(t)\bar{u} \quad \text{для некоторых } \bar{\varphi} \in \Phi, \ \ ||\bar{u}||_\infty \le 1,$$

поэтому $||\bar{\varphi} - \hat{\eta}||_\infty \le ||\lambda\bar{u}||_\infty \le a/3$, и тогда $\bar{\varphi} \in B_{a/3}(\hat{\eta})$, противоречие.

Общий случай сводится к рассмотренному одномерному. Мы оставляем его читателю в качестве упражнения. □

5. Сформулируем теперь основной результат настоящей статьи. В пространстве W, кроме исходной топологии, порожденной его нормой, будем также рассматривать $(C, L_\infty, \sigma^*)-$ топологию, которая есть произведение $C-$ топологии для x, $L_\infty-$ топологии для $\mathbf{u}$, и слабой-* топологии для α.

Теорема 3. *Пусть тройка $(x_0, \mathbf{u}_0, \alpha_0) \in W$ удовлетворяет системе (4)–(7), т.е. $F(x_0, \mathbf{u}_0, \alpha_0) = 0$. Предположим, что*

а) $\alpha_0^i(t) \ge const > 0$ почти всюду на $[0,T]$ $\forall\, i = 1, \ldots, N$,

т.е. точка $\alpha_0(t) = (\alpha_0^1(t), \ldots, \alpha_0^N(t))$ находится равномерно внутри симплекса A;

б) производная $F'(x_0, \mathbf{u}_0, \alpha_0)$ отображает W на Z.

Тогда в любой $(C, L_\infty, \sigma^*)-$ окрестности тройки $(x_0, \mathbf{u}_0, \alpha_0)$ найдется тройка $(\hat{x}, \hat{\mathbf{u}}, \hat{\alpha})$, также удовлетворяющая системе (4)–(7), у которой каждая функция $\hat{\alpha}^i(t)$ принимает лишь два значения: 0 и 1 (т.е. $\hat{\alpha}^i(t)$ есть характеристическая функция некоторого измеримого множества $E^i \subset [0,T]$).

Если ввести "обычное" управление $\hat{u} = \sum \hat{\alpha}^i(t)\, \hat{u}^i(t)$, то пара $(\hat{x}, \hat{u})$ будет удовлетворять исходной системе (1)–(3). Именно в этом смысле теорема 3 позволяет аппроксимировать траекторию $(x_0, \mathbf{u}_0, \alpha_0)$ расширенной системы (4)–(7) траекториями исходной системы (1)–(3).

Эта теорема фактически устанавливает корректность перехода от исходной управляемой системы к ее расширению с помощью скользящих режимов. В зарубежной литературе подобные теоремы называются релаксационными.

3. Доказательство теоремы 3

Напомним, что у нас $\mathbf{u} = (u^1, \ldots, u^N)$, $\alpha = (\alpha^1, \ldots, \alpha^N)$, все $u^i \in L_\infty^r$, $\alpha^i \in L_\infty$, и для $w = (x, \mathbf{u}, \alpha) \in W$ определена норма $||w|| = ||x||_{AC} + ||\mathbf{u}||_\infty + ||\alpha||_\infty$, где $||\mathbf{u}||_\infty = \sum ||u^i||_\infty$. Для упрощения обозначений не будем далее выделять набор $\mathbf{u}$ жирным шрифтом; это не приведет к недоразумениям.

1) Пусть дана произвольная $(C, L_\infty, \sigma^*)-$ окрестность точки $w_0 = (x_0, u_0, \alpha_0)$. Согласно теореме 1 можно считать, что в ней выполнена оценка (10). Кроме того, данная окрестность всегда содержит замкнутую окрестность $\Omega = \Omega(w_0, \varepsilon)$ вида:

$$||x - x_0||_C \le \varepsilon, \qquad ||u - u_0||_\infty \le \varepsilon,$$

$$\alpha \in \mathcal{V}(\alpha_0, \varepsilon) = \ \{\alpha \in L_\infty^N : \ |\langle l_j,\, \alpha - \alpha_0\rangle| \le \varepsilon, \ \ j = 1, \ldots, \sigma\,\},$$

где $\varepsilon > 0$, $\sigma -$ натуральное число, и все $l_j(t) \in L_1^N[0, T]$, причем $||l_j||_1 \le 1$.

Зафиксируем на дальнейшее функции $l_j(t)$, и для краткости записи введем набор функционалов $l = (l_1, \ldots, l_\sigma)$, так что $\langle l, \alpha\rangle$ есть вектор $\langle l, \alpha\rangle = (\langle l_1, \alpha\rangle, \ldots \langle l_\sigma, \alpha\rangle)$.

Искомая точка $\hat w = (\hat x, \hat u, \hat\alpha) \in \Omega \cap \mathcal{M}$ будет получена в виде предела последовательности точек $w_k = (x_k, u_k, \alpha_k) \in \Omega \cap \mathcal{M}$, которую мы сейчас построим, отправляясь от точки w_0 .

Для каждого $\delta \in [0, 1)$ обозначим через $A(\delta)$ симплекс в пространстве $\mathbf{R}^N$, полученный сжатием исходного симплекса A относительно его центра с коэффициентом $(1 - \delta)$. Таким образом, $A(0) = A$, и при любом $\delta > 0$ симплекс $A(\delta)$ лежит внутри A "на глубине δ". Условие (а) теоремы означает, что при некотором $\delta > 0$ почти всюду $\alpha_0(t) \in A(\delta)$.

Зафиксируем теперь имеющиеся $\varepsilon,\ \delta,$ и определим последовательности

$$\varepsilon_n = \varepsilon/2^n, \qquad \delta_n = \delta/3^n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

(таким образом, $\varepsilon_0 = \varepsilon$, $\delta_0 = \delta$), и затем положим

$$\gamma_n = \ \frac{1}{B}\ \cdot \min\left\{\frac{\varepsilon_n}{4},\, \frac{\delta_n}{3}\right\},$$

где $B -$ константа из (10), так что $B\gamma_n \le \varepsilon_n/4$ и $B\gamma_n \le \delta_n/3$.

2) Сделаем первый шаг. По условию имеем $F(w_0) = 0$, т.е. для точки w_0 выполнены равенства (4)–(7). Рассмотрим равенство (4) как уравнение относительно x при фиксированном $u = u_0$ и $\alpha \xrightarrow{\text{сл-*}} \alpha_0$ с начальным значением $x(0) = x_0(0)$. Поскольку это уравнение линейно по α, то по лемме 2 для соответствующих решений имеем $||x - x_0||_C \to 0$.

Так как $\alpha_0(t) \in A(\delta_0)$ и $A(\delta_0) \subset A(2\delta_0/3)$, то указанные $\alpha \xrightarrow{\text{сл-*}} \alpha_0$ можно брать принимающими значения в вершинах симплекса $A(2\delta_0/3)$, и поэтому существует $\tilde\alpha(t) \in ex\, A(2\delta_0/3)$, такая что

$$|\langle l,\, \tilde\alpha - \alpha_0\rangle| \ < \ \varepsilon_0/4,$$

т.е. $\tilde\alpha \in \mathcal{V}(\alpha_0,\, \varepsilon_0/4)$, и при этом $||\tilde x - x_0||_C \ < \ \varepsilon_0/4$,

$$||F(\tilde x, u_0, \tilde\alpha) - F(x_0, u_0, \alpha_0)|| \ < \ \gamma_0\ .$$

(Первая и третья компоненты $F(\tilde{x}, u_0, \tilde{\alpha})$ равны 0 по определению $\tilde{x}, \tilde{\alpha}$, а две остальные не зависят от α, поэтому они близки к соответствующим компонентам оператора $F(x_0, u_0, \alpha_0)$ для $\tilde{x}(t)$, равномерно близкого к $x_0(t)$.)

Полученная тройка $(\tilde{x}, u_0, \tilde{\alpha})$ очевидно лежит в Ω, поэтому для нее справедлива оценка (10), согласно которой существует точка $w_1 = (x_1, u_1, \alpha_1) \in \mathcal{M}$, такая что $||w_1 - (\tilde{x}, u_0, \tilde{\alpha})|| < B\gamma_0$. При этом

$$||x_1 - x_0||_C \le ||x_1 - \tilde{x}|| + ||\tilde{x} - x_0|| < B\gamma_0 + \varepsilon_0/4 \;\le\; \varepsilon_0/4 + \varepsilon_0/4 = \varepsilon_0/2 = \varepsilon_1\,,$$

$$||u_1 - u_0||_\infty \;<\; B\gamma_0 \le \varepsilon_0/4 \;< \varepsilon_0/2 = \varepsilon_1\,,$$

$$|\langle l,\, \alpha_1 - \alpha_0\rangle| \;\le\; |\langle l,\, \alpha_1 - \tilde{\alpha}\rangle| + |\langle l,\, \tilde{\alpha} - \alpha_0\rangle| \le$$
$$\le ||l||_1 \cdot ||\alpha_1 - \tilde{\alpha}||_\infty \;+ \varepsilon_0/4 \le\; 1 \cdot B\gamma_0 + \varepsilon_0/4 <\; \varepsilon_0/4 + \varepsilon_0/4 = \varepsilon_1\,,$$

т.е. для построенной точки $w_1 = (x_1, u_1, \alpha_1) \in \mathcal{M}$ выполнены условия:

$$||x_1 - x_0||_C < \varepsilon_1, \qquad ||u_1 - u_0||_\infty < \varepsilon_1\,, \qquad \alpha_1 \in \mathcal{V}(\alpha_0, \varepsilon_1),$$

поэтому $w_1 \in \Omega(w_0, \varepsilon_1)$, откуда с учетом равенства $\varepsilon_1 = \varepsilon_0/2$ следует, что $\Omega(w_1, \varepsilon_1) \subset \Omega(w_0, \varepsilon_0) = \Omega$.

Кроме того, так как $\tilde{\alpha} \in ex\,A(2\delta_0/3)$ и $||\alpha_1 - \tilde{\alpha}||_\infty < B\gamma_0 \le \delta_0/3$, то с одной стороны,

$$\alpha_1(t) \in A(2\delta_0/3 - B\gamma_0) \subset A(\delta_0/3),$$

а с другой, $\quad \mathrm{dist}\,(\alpha_1(t),\, ex\,A) \;\le\; 2\delta_0/3 + B\gamma_0 \le \delta_0\,.$

Таким образом, выполнены также условия:

$$\text{п.в.} \qquad \alpha_1(t) \in A(\delta_1),$$

$$\text{п.в.} \qquad \mathrm{dist}\,(\alpha_1(t),\, ex\,A) \le\; 3\delta_1\,. \tag{17}$$

Первый шаг завершен. Он был в некотором смысле подготовительным и несколько отличным от последующих. (Мы добились того, что теперь для α_1 выполнена оценка (17).) Следующие шаги будут уже в точности итерациями одной и той же процедуры.

3) Допустим, что при $k = 1, \ldots, n$ уже построены точки $w_k = (x_k, u_k, \alpha_k) \in \mathcal{M}$, для которых выполнены условия:

$$||x_k - x_{k-1}||_C < \varepsilon_k, \qquad ||u_k - u_{k-1}||_\infty < \varepsilon_k\,, \tag{18}$$

$$\alpha_k \in \mathcal{V}(\alpha_{k-1}, \varepsilon_k), \tag{19}$$

$$\Omega(w_k, \varepsilon_k) \quad \text{содержится в} \quad \Omega, \tag{20}$$

$$\text{п.в.} \qquad \alpha_k(t) \in A(\delta_k), \tag{21}$$

$$\text{п.в.} \qquad \operatorname{dist}(\alpha_k(t),\, ex\, A) \le 3\delta_k\,. \tag{22}$$

Отправляясь от точки w_n, построим точку w_{n+1}. Для этого рассмотрим равенство (4) как уравнение относительно x при фиксированном $u = u_n$ и $\alpha \xrightarrow{\text{сл-}*} \alpha_n$ с начальным значением $x(0) = x_n(0)$. По лемме 2 для соответствующих решений имеем $||x - x_n||_C \to 0$.

Так как $\alpha_n(t) \in A(\delta_n)$ и $A(\delta_n) \subset A(2\delta_n/3)$, то существует

$$\tilde\alpha(t) \in ex\, A(2\delta_n/3), \tag{23}$$

такая что $|\langle l,\, \tilde\alpha - \alpha_n\rangle| \,<\, \varepsilon_n/4$, т.е. $\tilde\alpha \in \mathcal{V}(\alpha_n,\, \varepsilon_n/4)$, и при этом

$$||\tilde x - x_n||_C \,<\, \varepsilon_n/4,$$

$$||F(\tilde x, u_n, \tilde\alpha) - F(x_n, u_n, \alpha_n)|| \,<\, \gamma_n\,. \tag{24}$$

Кроме того, по лемме 1 в силу оценки (22) можно считать, что

$$||\tilde\alpha - \alpha_n||_1 \,\le\, 9N\,\delta_n\,. \tag{25}$$

Легко видеть, что $(\tilde x, u_n, \tilde\alpha) \in \Omega(w_n, \varepsilon_n) \subset \Omega$, и поэтому в силу (24) существует точка $w_{n+1} \in \mathcal{M}$, такая что

$$||w_{n+1} - (\tilde x, u_n, \tilde\alpha)|| < B\gamma_n\,. \tag{26}$$

(Функции $\tilde x$, $\tilde\alpha$ мы не снабжаем индексами; это промежуточные рабочие точки на каждом шаге.) Тогда

$$||x_{n+1} - x_n||_C \le ||x_{n+1} - \tilde x|| + ||\tilde x - x_n|| < B\gamma_n + \varepsilon_n/4 \le \varepsilon_n/4 + \varepsilon_n/4 = \varepsilon_n/2 = \varepsilon_{n+1}\,,$$

$$||u_{n+1} - u_n||_\infty < \, B\gamma_n \le \varepsilon_n/4 \, < \varepsilon_n/2 = \varepsilon_{n+1}\,,$$

$$|\langle l,\, \alpha_{n+1} - \alpha_n\rangle| \le \, |\langle l,\, \alpha_{n+1} - \tilde\alpha\rangle| + |\langle l,\, \tilde\alpha - \alpha_n\rangle| \le$$

$$\le ||l||_1 \cdot ||\alpha_{n+1} - \tilde\alpha||_\infty \, + \varepsilon_n/4 \,\le\, 1 \cdot B\gamma_n + \varepsilon_n/4 \, < \varepsilon_n/4 + \varepsilon_n/4 \, = \varepsilon_{n+1}\,,$$

т.е. $\alpha_{n+1} \in \mathcal{V}(\alpha_n, \varepsilon_{n+1})$. Таким образом, $w_{n+1} \in \Omega(w_n, \varepsilon_{n+1})$, и поэтому, учитывая (20) и равенство $\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n/2$, получаем $\Omega(w_{n+1}, \varepsilon_{n+1}) \subset \Omega(w_n, \varepsilon_n) \subset \Omega$.

Далее, в силу (26) имеем $||\alpha_{n+1} - \tilde\alpha||_\infty \,<\, B\gamma_n \,\le\, \delta_n/3$, поэтому из (23) вытекает, что

$$\alpha_{n+1}(t) \in A(2\delta_n/3 - B\gamma_n) \subset A(\delta_n/3 = \delta_{n+1}),$$

$$\operatorname{dist}(\alpha_{n+1}(t),\, ex\, A) \le \, 2\delta_n/3 + B\gamma_n \, \le \delta_n = 3\delta_{n+1}\,.$$

Таким образом, условия (18)–(22) выполнены для $k = n+1$, и значит, возможен следующий шаг — от w_{n+1} к w_{n+2}.

Наконец, из (25) и (26) получаем еще одну важную оценку:

$$||\alpha_{n+1} - \alpha_n||_1 \le ||\alpha_{n+1} - \tilde\alpha||_\infty + ||\tilde\alpha - \alpha_n||_1 \le$$

$$\le B\gamma_n + 9N\,\delta_n \le \frac{1}{3}\,\delta_n + 9N\,\delta_n < (9N+1)\,\delta_n ,$$

которая выполняется на каждом шаге нашего процесса.

4) Итак, мы построили последовательность точек $w_k = (x_k, u_k, \alpha_k) \in \mathcal{M}$, $k = 1, 2, \ldots$, для каждой из которых выполнены условия (18)–(22), а также дополнительная оценка

$$||\alpha_{k+1} - \alpha_k||_1 \le (9N+1)\,\delta_k .$$

В силу этой оценки и (18) последовательность w_k фундаментальна относительно нормы $||x||_C + ||u||_\infty + ||\alpha||_1$, и поэтому она имеет предел $\hat w = (\hat x, \hat u, \hat\alpha)$ в пространстве $C \times L_\infty \times L_1$ (более широком, чем наше $W = AC \times L_\infty \times L_\infty$). Таким образом,

$$||x_k - \hat x||_C \to 0, \qquad ||u_k - \hat u||_\infty \to 0, \qquad ||\alpha_k - \hat\alpha||_1 \to 0. \tag{27}$$

Посмотрим, что выполнено для предельной тройки.

Так как $\forall\, k$ выполнено уравнение $F^1(w_k) = 0$, где $F^1(w)$ есть первая компонента оператора $F(w)$, то, рассмотрев интегральную форму этого уравнения, приходим к выводу, что для предельного $\hat x(t)$ также выполнено это интегральное уравнение, из которого следует, что на самом деле $\hat x \in AC(\Delta)$ и для него выполнено уравнение $F^1(\hat w) = 0$ (и следовательно, $||x_k - \hat x||_{AC} \to 0$).

Компоненты F^2, F^4 не содержат $\dot x$, α, поэтому для них очевидно выполнены предельные равенства $F^2(\hat x, \hat u) = 0$, $F^4(\hat x, \hat u) = 0$.

Далее, для всякого замкнутого множества $V \subset \mathbf{R}^N$ множество функций $\alpha \in L_1^N(\Delta)$, таких что п.в. $\alpha(t) \in V$, очевидно замкнуто в $L_1^N(\Delta)$. Отсюда следует, что п.в. $\hat\alpha(t) \in A$, и тем самым $\hat\alpha(t)$ ограничена, т.е. $\hat\alpha \in L_\infty^N(\Delta)$, и $F^3(\hat\alpha) = \sum \hat\alpha^i(t) - 1 = 0$.

Таким образом, предельная точка $\hat w$ принадлежит пространству W, и для нее $F(\hat w) = 0$, т.е. $\hat w \in \mathcal{M}$. Легко видеть, что множество Ω замкнуто относительно сходимости (27) (здесь мы используем тот факт, что если последовательность $\bar\alpha_k$ ограничена в $L_\infty^N(\Delta)$, и $||\bar\alpha_k||_1 \to 0$, то $\forall\, l \in L_1^N(\Delta)$ будет $\int_\Delta l\,\bar\alpha_k\,dt \to 0$), поэтому из (20) вытекает, что $\hat w \in \Omega$. (Это вытекает также из суммирования оценок (18), (19).)

Наконец, из оценки (22) следует, что $\forall\,\rho > 0$ при достаточно больших n почти всюду $\operatorname{dist}(\alpha_k(t), ex\,A) \le \rho$, т.е. $\alpha_k(t)$ принадлежит замкнутому $\rho-$ раздутию множества вершин симплекса A. Тогда и предельная $\hat\alpha(t)$ почти всюду принадлежит этому $\rho-$ раздутию, а в силу произвольности $\rho > 0$ она принадлежит пересечению всех $\rho-$ раздутий, которое совпадает с множеством вершин $ex\,A$, так как последнее замкнуто. Итак, почти всюду $\hat\alpha(t) \in ex\, A$, а это и означает, что каждая компонента $\hat\alpha^i(t)$ может принимать лишь два значения: 0 и 1. Теорема доказана. $\square$

4. Комментарии

1. Условие (б) теоремы 3 существенно — без него она перестает быть верной. Контрпример легко получается из классического примера Больца, а именно: рассмотрим систему

$$\dot x = u, \qquad \dot y = x^2 + (u^2-1)^2, \qquad y(0) = y(1) = 0.$$

Множество ее решений пусто, так как при любых $x(t)$ и $y(0)$ всегда $y(1) > y(0)$. В то же время соответствующая ей расширенная (овыпукленная) система

$$\dot x = \alpha_1\, u_1 + \alpha_2\, u_2, \qquad \dot y = x^2 + \alpha_1\,(u_1^2-1)^2 + \alpha_2\,(u_2^2-1)^2,$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 1, \qquad y(0) = y(1) = 0$$

(здесь мы индексы пишем внизу) имеет решение $x(t) \equiv y(t) \equiv 0$, порожденное управлениями $\alpha_1 = \alpha_2 = 1/2$, $u_1 = -1$, $u_2 = 1$, которое не может быть приближено решениями исходной системы, ибо таковых просто нет. Причина здесь в том, что на данном решении условие (б) не выполнено — равенства расширенной системы вырождены.

2. Что же касается условия (а), то его роль скорее техническая, и по всей видимости от него можно избавиться. Например, можно предложить следующий путь. Надо $\forall\, \delta > 0$ рассмотреть множество

$$E_\delta = \{\, t \mid \forall\, i \quad \alpha^i(t) \ge \delta \quad \text{п.в. на } [0,T]\,\},$$

вне которого все функции $u^i,\, \alpha^i$ зафиксировать, и рассматривать управления $u^i,\, \alpha^i$ только на этом множестве, т.е. в пространствах $L^r_\infty(E_\delta)$, $L_\infty(E_\delta)$ соответственно. При $\delta \to 0$ мера E_δ стремится к полной мере отрезка $[0,T]$. Отсюда следует, что если исходный оператор $F'(w_0) : W \to Z$ был сюрьективным, то при малых $\delta > 0$ его сужение на соответствующее пространство W_δ, определенное на E_δ, также останется сюрьективным, и поэтому вся приведенная выше процедура итерационных поправок должна пройти и в этом случае. Конечно, эти предварительные соображения требуют детальной проработки.

3. Теорема 3 может быть использована в доказательстве Принципа Максимума для задач оптимального управления с концевыми, фазовыми и регулярными смешанными ограничениями с помощью введения скользящих режимов. Идею такого доказательства автор узнал от А.А. Милютина еще в середине 1970-х годов; тогда же она была и реализована автором, а позже опубликована в [17] и [21, Глава 4].

Аналогичная теорема была доказана С.В. Чукановым [18] для управляемых систем с интегральными уравнениями, и он также применял ее для доказательства соответствующего Принципа Максимума.

Список литературы

[1] Р.В. Гамкрелидзе. Оптимальные скользящие режимы // *ДАН СССР,* 1962, т. 143, № 6, с. 1243–1245.

[2] Л. Янг. *"Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления".* Мир, 1974г.

[3] E.J. McShane. Relaxed controls and variational problems // *SIAM J. on Control,* 1967, v. 5, p. 438–485.

[4] А.Д. Иоффе, В.М. Тихомиров. *Теория экстремальных задач.* М., Наука, 1974.

[5] Дж. Варга. *Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями.* М., Наука, 1977.

[6] C. Olech. Existence theory in optimal control // in *"Control theory and topics in functional analysis",* v. I, Vienna, 1976, p. 291–328.

[7] E.J. Balder. A general denseness result for relaxed control theory // *Bull. of Australian Math. Society,* 1984, v. 30, p. 463–475.

[8] Z. Artstein, Rapid oscillations, chattering systems, and relaxed controls // *SIAM J. on Control and Opt.,* 1989, v. 27, no. 5, p. 940–948.

[9] J.F. Rosenblueth, R.B. Vinter, Relaxation procedures for time delay systems // *J. Math. Anal. Appl.,* 1991, v. 162, no. 2, p. 542–563.

[10] T. Roubicek. *Relaxation in Optimization Theory and Variational Calculus.* de Gruyter, Berlin, 1997.

[11] A.A. Tolstonogov. *Differential Inclusions in a Banach Space.* Dordrecht, Kluwer, 2000.

[12] А.И. Булгаков, В.В. Васильев. К теории функционально-дифференциальных включений нейтрального типа // *Georgian Math. J.,* 2002, v. 9, no. 1, p. 33–52.

[13] Н. Данфорд, Л. Шварц. *Линейные операторы. Т.1. Общая теория.* М., ИЛ, 1962.

[14] A. Visintin. Strong convergence results related to strict convexity // *Commun. Partial Diff. Equations,* 1984, v. 9, No. 5, p. 439–466.

[15] T. Rzezuchowski. Strong convergence of selections implied by weak // *Bull. Austral. Math. Soc.,* 1989, v. 39, p. 201–214.

[16] А.В. Дмитрук, А.А. Милютин, Н.П. Осмоловский. Теорема Люстерника и теория экстремума // *Успехи мат. наук,* 1980, т. 35, N 6, с. 11–46.

[17] А.В. Дмитрук. Принцип максимума для общей задачи оптимального управления с фазовыми и регулярными смешанными ограничениями // В сб. *"Оптимальность управляемых динамических систем",* М., ВНИИСИ, 1990, вып. 14, с. 26–42.

[18] С.В. Чуканов. Принцип максимума для задач оптимального управления интегральными уравнениями // В кн. *"Необходимое условие в оптимальном управлении" (ред. А.А.Милютин),* М., "Наука", 1990.

[19] А.В. Дмитрук. A nonlocal Lyusternik estimate and its application to control systems with sliding modes // in *"Nonlinear Control Systems 2001"* (ed. A.B.Kurzhanski and A.L.Fradkov), Elsevier, 2002, vol. 2, p. 1061–1064.

[20] A.V. Dmitruk, On a nonlocal metric regularity of nonlinear operators // *Control and Cybernetics*, 2005, v. 34, no. 3, p. 723–746.

[21] А.А. Милютин, А.В. Дмитрук, Н.П. Осмоловский. *Принцип максимума в оптимальном управлении,* М., Изд-во мехмата МГУ, 2004.